Johann Michael Schirmer

selbstlehrende

Algebra

---

in fünf Abtheilungen

Alle fünf Abtheilungen komplet kosten bei dem Verleger 4 Gulden 30 Kreuzer.

Johann Michael Schirmer
Schul- Schreib- und Rechenmeisters in Frankfurt am Main

selbstlehrende Algebra

das ist

gründliche Anweisung

wie ein jeder

welcher die gemeine Rechenkunst verstehet

diese vortrefliche Wissenschaft

ohne mündlichen Unterricht

lernen

und mittelst derselben

alle schwere Rechnungsvorfälle

die sich sowohl bei dem Militare, der Handlung und den Künsten
als auch überhaupt im gemeinen Leben
ereignen

fertig und ohne Schwierigkeit

auflösen kan

mit einem nüzlichen Register

---

erste Abtheilung

Frankfurt am Main
in der Andreäischen Buchhandlung 1779.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Wann sich bei der Mathematic, oder überhaupt im gemeinen Leben, Rechnungsvorfälle eräugnen, welche durch die gemeine Arithmetic entweder schwer oder ohnmöglich aufzulösen sind, so kan solches, im Fall der Möglichkeit, durch die sogenante Algebra leichter und ohnfehlbar geschehen.

Diese Algebra aber ist nicht nur eine Wissenschaft, mittelst welcher man alles ausrechnen kan, was sich ausrechnen lässet, sondern sie ist hauptsächlich ein wichtiger Theil der Mathematic, ja eine der nüzlichsten Wissenschaften im gemeinen Leben.

Vorerinnerung.

In Ansehung der Mathematic lehret dieselbige allgemeine Regeln und Auflösungen, Erfindungen und Beweise, worzu wir sonst auf keinerlei Weise gelangen können, und in Ansehung des gemeinen Lebens führet sie zu einer Erkentnis, die dem menschlichen Verstande Ehre machet.

Dahero ist einem jeden Stand, welcher in mathematische Wissenschaften und in deren Rechnungen nur einigen Einfluß hat, die Algebra nöthig und nüzlich, wie solches bei dem Militare der Officier, der Handelsmann und der Künstler, genugsam erfahren kan.

Insonderheit ist die Beschäftigung mit dieser Wissenschaft den jungen Leuten sehr nüzlich, weil dadurch fast ein jedes Seelenvermögen geschärffet und erhöhet wird, weswegen auch viele der vortreflichsten Männer

den

den Studirenden die Mathematic, und mit derselben die Algebra, so ernstlich angepriesen haben.

Denenjenigen aber, welche Profession von der Rechenkunst machen wollen, ist die Algebra vorzüglich nöthig, indeme sie sonsten in deren Ermangelung unzähliche und wichtige Fragen ohnbeantwortet lassen müssen, davon ich ehedem empfindlich genug überzeuget worden.

Daß aber sothane vortrefliche Wissenschaft noch immer nicht also verbreitet worden, wie es billig ihr nüzlicher Gebrauch erfordert, davon wird die Ursache in dem Unterricht derselben und in denen gröstentheils daher entstehenden Vorurtheilen gefunden.

Der mündliche Unterricht in der Algebra ist sehr rar, und wird sowohl privatim als in denen Schulen gar selten gefunden, und wann derselbige ja unter-

nommen wird, so ist er nur theoretisch und troken, mithin nicht practisch genug, dahero die Scholaren, wie ich aus der Erfahung weiß, dabei gähnen, einen Widerwillen bekommen, und vorurtheilen: diese Wissenschaft sei gar zu schwer zu lernen, und noch darzu ohne Nuzen, u. dgl.

Mit dem schriftlichen Unterricht, d. i. mit algebraischen Büchern, ist die Welt zwar reichlich versehen, und können solche überhaupt in Grössere und Kleinere eingetheilet werden.

Die grössere Werke, darinnen die Algebra abgehandelt wird, sind von grossen Gelehrten geschrieben, und werden von Kennern hochgeschäzet und mit Nuzen gelesen; alleine da es diesen Herren, so viel mir wenigstens derselben bekant sind, nicht beliebet, sich an die Stelle eines Anfängers einfältig herunter zu

denken, so kan es nicht anders sein, als daß dieser bei seinem Vorurtheil bleiben muß: diese Wissenschaft übersteige den Verstand.

Die kleinere Werke sind zum Theil sehr schön, und ein Kenner liebet sie; weil aber solche für Anfängere in Ansehung der Specien zu mathematisch eingeschränket sind, mithin selbige die in der Folge entstehende vielerlei *Fällen* nicht verstehen und beurtheilen können, so werden sie von ihrem Vorurtheil nicht befreiet.

Die übrigen kleine Tractätgen von der Algebra lässet man in ihrem Wehrt und Unwehrt: doch muß ich von denselben bekennen, daß sie nicht hinreichen, denen Anfängern eine rechte Idee von der algebraischen Rechenkunst zu machen.

Stünden diese aus dem münd- und schriftlichen Unterricht der Algebra entstehende Vorurtheilen der

Erlernung derselben nur allein entgegen, so würden sich solche wohl noch ausrotten lassen; alleine es werden die jungen Leute auch noch über dieses geflissentlich davon abgeschreket.

Hier erzählet in einer zahlreichen Gesellschaft selbst ein Gelehrter, daß er auf Universitäten ein Collegium über die Algebra gehöret, aber wenig oder nichts davon verstanden hätte, und sezet hinzu, daß er auch nicht einsehen könne, worzu solche diene.

Dorten erklären andere, und unter denselben sogar Lehrer der Rechenkunst, die Algebra für unnüze Grillen, für eine Marter junger Leute, spasen damit, und was dergleichen mehr ist.

Solchemnach hat die Algebra unter allen Wissenschaften bis hieher noch das widrigste Schiksal, ohngeachtet ein jeder Theil der Mathematik durch sie

cultiviret, erhöhet, und zur Vollkommenheit gebracht wird: wenn es anders wahr ist, was ein grosser Wolf saget, daß man in der Algebra die allervollkommenste Manier zu raisonniren antreffe.

Nun komt es auf die Beantwortung der Frage an: ob gegenwärtige Algebra zwekmässig sei, oder ob ein jeder, welcher die gemeine Rechenkunst verstehet, dieselbige ohne mündlichen Unterricht lernen könne?

Voraus gesezt, daß alle, welche zur gründlichen Erlernung der gemeinen Rechenkunst fähig sind, um so mehr zur Erlernung der Algebra geschikt sein müssen, weil bei jener in Ansehung der Rechnungen mit Einten und bestimten Zahlen viel mehr Nachdenken erfordert wird, als hier bei den Rechnungen mit Grössen nöthig ist, welches Erfahrung und bewährte Zeugnisse vorlängst bewiesen haben.

 Schon

Vorerinnerung.

Schon vor geraumen Jahren ist der Endzwek des Selbstlehrens durch das Manuscript erreichet worden, da in- und ausländische junge Leute sich dessen ohne mündlichen Unterricht und ohne die geringste Schwierigkeit bedienet haben.

Währendem Druk haben verschiedene in der gemeinen Rechenkunst geübte Jünglinge von dreizehn bis vierzehn Jahren die Auflösungen nach und nach spielend verrichtet, und die sich gegenwärtig damit beschäftigen, bezeugen, daß ihnen die gemeine Arithmetic und ihre practische Anwendungen weit mehrere Mühe gekostet hätten.

Von sothanem Selbstlehren urtheilet die jenaische gelehrte Zeitung 1779 im 31sten Stük: Wirklich wird das Werk für solche, welche sich keines mündlichen Unterrichts bedienen können,

brauchbar sein — — Sonst halten wir diese Schrift für brauchbar genug, und wünschen derselben viele Leser, und viele, welche dadurch eine Neigung zu einer Wissenschaft bekommen mögen, die man ohne Noth für schwer hält, und deren Vortheile längst entschieden sind. Und die berliner gelehrte Zeitung 1780, 47stes Stük, enthält unter andern das Zeugnis: Der Verfasser hat den Erwartungen des Publicums gröstentheils entsprochen. Seine Ordnung ist natürlich, seine Erklärungen sind faßlich, und seine Beispiele passend. Anderer münd- und schriftlichen Approbationen nicht zu gedenken.

Es bleibet also nicht die geringste Schwierigkeit übrig, die unvergleichliche Algebra aus diesem Buche, so weit es nemlich dessen Inhalt erfordert, zu studiren,

diren, und ein jeder wird nicht nur gleich bei dem Anfang den Zusammenhang der Paragraphen, und wie einer den andern veranlasse und deutlich mache, einsehen, sondern er wird auch in dem Fortgang, wann er nur, mit der Feder in der Hand, nebst dem Lesen auch schreiben und ohne Ausnahme alles nachrechnen wird, ohnvermerkt und mit Vergnügen von einer Kentnis zur andern in dieser Wissenschaft gelangen, welches herzlich wünschet

der Verfasser.

Summarischer Inhalt.

Erste Abtheilung.

Einleitung in die Algebra Seite 3
Vom Bezeichnen der Grössen mit Buchstaben S. 7
Vom Reduciren S. 13
Vom Addiren S. 19
Vom Subtrahiren S. 21
Vom Multipliciren S. 24
Vom Dividiren S. 32

Von den Brüchen S. 62
Vom Bezeichnen der Theilen mit Buchstaben S. 62
Vom Resolviren S. 64
Vom Reduciren S. 69
Vom Addiren S. 72
Vom Subtrahiren S. 75
Vom Multipliciren S. 77
Vom Dividiren S. 81

Von den Quadratgrössen und Ausziehung ihrer Wurzeln
I. Nach gemeiner Art mit Ziffern S. 85
II. Nach der Algebra mit Buchstaben S. 98

Von den Cubicgrössen, und Ausziehung ihrer Wurzeln
I. Nach gemeiner Art mit Ziffern S. 121
II. Nach der Algebra mit Buchstaben S. 126

Von

Von den Irrationalzahlen, und der Rechnung mit denselben S. 140

Von den eingebildeten Zahlen, und der Rechnung mit denselben S. 154

Zweite Abtheilung.

Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt S. 3

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen insbesondere S. 7

Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen insbesondere S. 15

Von den Progressionen überhaupt S. 23

I. Von der arithmetischen Progression S. 23

II. Von der geometrischen Progression S. 39

Von den Poliigonalzahlen, und ihren Wurzeln überhaupt S. 68

I. Von den einfachen oder gemeinen Poliigonalzahlen, und ihren Wurzeln S. 68

II. Von den Centralpoliigonalzahlen, und ihren Wurzeln S. 85

Von den Columnar- oder Säulenzahlen, und ihren Wurzeln überhaupt S. 95

I. Von den gemeinen Columnar- oder Säulenzahlen, und ihren Wurzeln S. 96

II. Von den Centralcolumnar- oder Säulenzahlen, und ihren Wurzeln S. 102

Von

Von den Piramidalzahlen, und ihren Wurzeln überhaupt S. 110
I. Von den gemeinen Piramidalzahlen, und ihren Wurzeln S. 111
II. Von den Centralpiramidalzahlen, und ihren Wurzeln S. 123

Von den abgekürzten Piramidalzahlen, und ihren Wurzeln S. 132
Von den Proniczahlen, und ihren Wurzeln S. 135
Von den Logarithmen S. 139

Dritte Abtheilung.

Einleitung in die Gleichungen S. 3
Von den einfachen Gleichungen, und zwar
I. Da eine Vorgabe nur eine Gleichung erfordert S. 17
II. Da eine Vorgabe zwo Gleichungen erfordert S. 124
III. Da eine Vorgabe drei Gleichungen erfordert S. 138
IV. Da eine Vorgabe vier Gleichungen erfordert S. 148

Vierte Abtheilung.

Von den quadratischen Gleichungen S. 3
I. Von den reinen quadratischen Gleichungen S. 3
Da mehr als eine Gleichung erfordert wird §. 563
II. Von den vollständigen quadratischen Gleichungen S. 30
Da solche suppliret oder ergänzet werden §. 570
Da mehr als eine Gleichung erfordert wird §. 574
Da die Vorgaben unbestimt sind §. 575

Von Auszichung der Wurzeln auf eine allgemeine Art, und zwar
Aus gemeinen Trigonalzahlen §.577
Aus gemeinen Pentagonalzahlen §.578
Aus einer jeden gemeinen Poliigonalzahl §.580
Aus Centraltrigonalzahlen §.584
Aus Centraltetragonalzahlen §.585
Aus Centralpentagonalzahlen §.586
Aus einer jeden Centralpoliigonalzahl §.588

Von Auszichung der Wurzeln aus Binomien S. 106
Von den zweierlei Wurzeln quadratischer Gleichungen, und gewisse Regeln hierzu S. 114
Von Formirung quadratischer Gleichungen S. 127

Fünfte Abtheilung.

Von den cubischen Gleichungen S. 3
I. Von den reinen cubischen Gleichungen S. 3
II. Von den vollständigen cubischen Gleichungen S. 18

Von den biquadratischen Gleichungen S. 81
I. Von den reinen biquadratischen Gleichungen S. 81
II. Von den vollständigen biquadratischen Gleichungen S. 89

Von den Gleichungen unbestimter Vorgaben S. 114

Anzeige.

Nachdeme die Herausgabe der Schirmerischen Algebra, wovon ein geehrtes Publicum bereits in der Ostermesse 1777 benachrichtiget worden, wegen verschiedener Hindernissen nicht zu Stande gekommen, so wird solche nunmehro von endesbenanter Buchhandlung besorget. Weil nun viele Liebhaber wünschen, wegen dem vielen Zeitverlust, das Werk stükweise in die Hände zu bekommen, so erscheinet hiermit die erste Abtheilung desselbigen, als die Grundlage der Algebra. In der zweiten Abtheilung wird von den Verhältnissen, Proportionen, Progressionen, und poliigonal- oder sogenanten ekigten Zahlen, mit beigefügten nöthigen Figuren, und vom Gebrauch der Logarithmen, gehandelt werden. Die dritte Abtheilung wird alsdann einfache, die vierte Abtheilung quadra-

tische, und die fünfte Abtheilung cubische und biquadratische Gleichungen, nebst Auflösungen unbestimter Vorgaben, enthalten, worauf ein nüzliches Register über Wörter und Sachen folgen wird. Der wichtige Inhalt dieser ersten Abtheilung, und die gründliche und faßliche Lehrart in derselben, empfiehlet das Werk schon hinlänglich, mithin würde überflüssig sein, dieser Anzeige mehr als nur noch die Versicherung anzufügen, daß man an dem Druk ohngehindert fortfahre, und jederzeit, wann eine Abtheilung die Presse verlassen haben wird, solches bekant machen werde.

Andreäische Buchhandlung.

Diese erste Abtheilung kostet bei dem Verleger 54 Kreuzer.

Selbst-

Selbstlehrende
Algebra

---

erste Abtheilung

Einleitung
in die
Algebra.

§. 1.

Die Algebra ist eine Wissenschaft, mit Grössen zu rechnen, daher sie auch eine Grösserechenkunst genennet wird.

§. 2. Unter einer Grösse verstehet man überhaupt eine jede Zahl oder Sache, sie mag nach ihrer Vielheit, Schwere u. dgl. beschaffen sein, wie sie wolle.

Z. E. die Zahlen 500, 150, ein Ballen Waar von 2 Centner und 60 ℔, sind drei Grössen.

Item, die Zahl 120½, ein Sak von 3 Centner und 40 ℔, vier Schok und 36 Ehlen, 5½ Ohm, sind vier Grössen.

§. 3. Mit Grössen rechnen (§. 1) heisset, dieselbige nach Masgab einer Vorgabe vermindern oder vermehren, ohne auf ihre Einten, Schwere u. dgl. eine Absicht zu nehmen.

§. 4. Sol aber dieses geschehen, so werden natürlicher Weise einfache Figuren oder Zeichen erfordert, durch welche man solche Grössen bezeichnen könne.

§. 5. Zu dem Ende sind hierzu die **Buchstaben** des kleinen lateinischen Alphabets, oder *a*, *b*, *c*, als bereits bekante Figuren, am schiklichsten befunden und angenommen worden, daher die Rechnung mit denselben **Buchstabe**rechnung genennet wird.

§. 6. Wann demnach eine Vorgabe aufgelöset werden sol, so bezeichnet oder benennet man zuvörderst die Zahlen oder Säze derselben (§. 2) mit den **ersten Buchstaben** gedachten Alphabets, so viel deren nöthig sind, und nennet alsdann diese Buchstaben, zum Unterschied jener Zahlen mit Ziffern, **Grössen.**

Z. E. Eine Vorgabe enthielte die Zahlen 500 und 150, sodann 2 Ct. und 60 ℔, so würden diese drei Zahlen mit *a*, *b*, und *c*, nemlich 500 mit *a*, 150 mit *b*, und 2 Ct. 60 ℔ mit *c* benennet.

Oder: Es wären die Zahlen: 120½, 3 Ct. 40 ℔, 4 Schok, 36 Ehlen, und 5½ Ohm; so bekäme man dafür die Grössen: *a*, *b*, *c* und *d*.

§. 7. Diese erste Buchstaben werden **bekante Grössen** genant, theils, weil man sie anstatt der bekanten Zahlen und Säzen annimt, theils, weil ihnen **unbekante Grössen** entgegen stehen.

§. 8. Eine **unbekante Grösse** aber ist bei einer Vorgabe derjenige Saz, von welchem zwar das Wesen, nicht aber die Beschaffenheit desselben, angezeigt wird.

§. 9. Damit nun bekante und unbekante Grössen voneinander desto käntlicher sein mögen, so werden diese mit den **lezten Buchstaben**, als *x*, *y*, *z*, oder so derselben mehr erfordert werden, *u*, *x*, *y*, *z* u. s. f. benennet.

Z. E. Es solten vermög einer Vorgabe 10 Thlr., die Zahl 15, 12 ℔ und verschiedene Ehlen mit Buchstaben bezeichnet werden, so würde *a* für 10 Thlr. *b* für 15, *c* für 12 ℔, und *x* für die Anzahl der Ehlen genommen.

§. 10.

§. 10. Nebst bemeldten ersten und lezten Buchstaben werden auch noch alle darzwischen befindliche Buchstaben gebraucht, wie sich solches in Zukunft äussern wird.

§. 11. Sind die Zahlen und Säze einer Vorgabe, wie hiernächst wird besonders gelehret werden, mit Buchstaben benennet, so wird alsdann die erforderliche Rechnung mit denselben verrichtet, und man erhält natürlicher Weise die Antwort oder das Facit auch in Buchstaben.

§. 12. Diese erhaltene Buchstaben haben, wie es sich von selbsten verstehet, eben den Wehrt, welcher ihnen von Anfang zugeeignet worden, und werden auch nach denselben in gemeine Zahlen resolvirt; alleine da sie, nach dem Vorhergehenden, allgemeine Zeichen der Zahlen und Säzen sind, so sind sie demnächst auch unbestimte Grössen, deren Umfang, Schwere, Vielheit u. dgl. willkührlich angenommen werden kan (§. 2).

§. 13. Von sothaner Allgemeinheit der Buchstaben hanget auch die Rechnung mit denselben ab, indeme alle Arten der Vermehr- oder Verminderung einerlei ist, es mögen die Buchstaben aus den Erstern, Leztern oder Mittlern bestehen.

§. 14. Hieraus erkennet man nicht nur schon die Vortreflichkeit der Buchstaberechenkunst, sondern es werden auch inskünftige Exempeln, Beweise und Erfindungen an den Tag legen, daß durch dieselbige ersezet werden muß, wo die gemeine Rechenkunst nicht hinreichet.

§. 15. Die sogenante Gleichungen bleiben ohnehin der Algebra ganz eigen, indeme die gemeine Rechenkunst nichts damit zu thun hat.

§. 16. Durch diese Gleichungen, wovon erst zu seiner Zeit das Nöthige gesaget werden kan, wird insgemein die eigentliche Algebra verstanden, und die Rechnung mit Buchstaben, Buchstaberechnung genennet.

§. 17. Alleine gleichwie die gemeine Rechenkunst überhaupt Zifferkunst genennet werden kan, also wird wohl nichts daran gelegen sein, wann man die Rechnungen, so mit Buchstaben verrichtet werden, zusammen Algebra nennet, und die Gleichungen, wie bei der gemeinen Rechenkunst die Regel de Tri, da endlich alle Rechnungsarten zusammenfliessen, betrachtet.

§. 18. Gleichwie nun bei dem gemeinen Rechnen zuerst gelehret werden muß, wie man die Zahlen mit Ziffern schreibet, also ist hier zuvörderst nöthig, zu zeigen, wie die Zahlen oder Säze bei einer Vorgabe mit Buchstaben bezeichnet oder benennet werden müssen (§. 6), welches hiernächst folget.

Vom

Vom
Bezeichnen der Grössen
mit Buchstaben.

§. 19.

Die Grössen, so bei der Algebra vorkommen, sind entweder incomplexe oder complexe Grössen.

§. 20. Incomplexe Grössen nennet man diejenigen, welche für sich alleine und mit keiner andern Grösse verbunden sind; und werden entweder mit einem oder mit mehreren Buchstaben bezeichnet.

§. 21. Mit einem Buchstaben werden alle incomplexe Grössen bezeichnet, welche keine Multiplication zum Grunde haben, d. i. die keine Producten sind, sie mögen in ganzen oder gebrochenen Zahlen bestehen, wie sie wollen (§. 6); das 1 aber, als der Grund von allen ganzen und gebrochenen Zahlen, bleibet in seiner Figur: 1.

Z. E. $\frac{3}{4}$ ℔, 4 fl, $6\frac{1}{2}$ Ehl und etliche Stüke Zeug sind vier incomplexe Grössen, und können heissen: a, b, c, x.

Nota: Der Buchstab x komt zwar, nebst den übrigen unbekanten Grössen (§. 9), erst bei den Gleichungen vor (§. 15); damit aber Anfängere solchen gleich andern bekanten Grössen zu behandeln (§. 13) sich angewöhnen, so wird er zuweilen mit eingemischt.

§. 22. Mit mehr als einem Buchstaben werden alle incomplexe Grössen bezeichnet, welche Producten sind: denn da wird für einen jeden Factoren ein besonderer Buchstab genommen, und dieselbige werden alsdann nur

schlechthin nebeneinander gesezet, ohne desfals auf eine gewisse Ordnung zu sehen.

Z. E. Das Product von 6 und 8 kan heissen: ab oder ba, auch bc oder cb u. s. f.

Item: Das Product von 6, 8 und 4 kan bezeichnet werden: abc, oder bac, bcd u. s. f.

Oder, da ein Factor eine unbekante Zahl ist: ax oder xa, axb oder xab u. s. f.

§. 23. Bestehen Factoren in gebrochenen Zahlen, so werden solche, eben wie vorhin, ohne auf ihre Theile zu achten, mit Buchstaben bezeichnet.

Z. E. Das Product von $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$ kan heissen: ab, von 4 und $\frac{5}{6}$ kan sein ab, oder bc u. s. f.

§. 24. Sind die Factoren einander gleich, so müssen sie auch mit gleichen Buchstaben bezeichnet werden.

Z. E. Die Producten von 4 und 4, von 5, 5 und 5, von 3, 3, 3 und 3 können heissen: aa, aaa, $bbbb$

Item: Die Producten von zween, drei und vier unbekanten Factoren: xx, xxx, $xxxx$

§. 25. Hier siehet man den Unterschied zwischen der Bezeichnung eines Products mit Buchstaben und mit Ziffern.

Z. E. Das Product von 6 und 6 wird bezeichnet mit Buchstaben: aa, mit Ziffern aber: 36, und nicht 66; wohl aber kan es geschehen: 6. 6

§. 26 Werden aber gemeine Zahlen miteinander multiplicirt, so wird zwischen die Factoren ein sogenantes Andreas- oder liegendes Creuz und vor das Product das angenommene Aequations- oder Gleichungszeichen gesezet

Z. E. $6 \times 8 = 48$, welches heisset: 6 mahl 8 ist gleich 48

§. 27. Dieses Gleichungszeichen heisset überhaupt gleich, mithin kan man sich dessen auch bei andern Vorfällen anstatt dieses Worts bedienen.

Z. E. $\frac{3}{4} = a$ oder $b = 5$, oder eine unbekante Zahl $= x$

§. 28.

§. 28. Da die Bezeichnungen der Producten verschiedener gleicher Factoren (§. 24) einen Mißstand machen, so bezeichnet man nur einen derselben, und sezet ihre Anzahl mit einer kleinen Ziffer darneben.

Z. E. Für aa ist die Bezeichnung: a^2, für aaa ist dieselbige: a^3, für $aaaa$ ist sie: a^4, für xx, xxx, $xxxx$ ist sie: x^2, x^3, x^4 u. s. f.

§. 29. Diese neue Formel nennet man eine **Potenz**, oder **Dignität**, den Factoren die **Wurzel von der Potenz**, und die nebenstehende Ziffer den **Exponenten** oder den **Angeber**, weil er den Grad anzeiget, zu welchem die Wurzel erhaben ist.

Z. E. Die Potenz wäre: a^4, so ist die Wurzel a zum vierten Grad erhaben, welches geschiehet, wann eine Zahl dreimahl mit ihr selbst multiplicirt wird (§. 24).

§. 30. Bestehet ein Product aus einer Potenz und aus einer oder mehreren gemeinen, oder aus etlichen Potenzen und gemeinen Zahlen, so werden solche, eben wie vorhin, nur nebeneinander gesezet.

Z. E. 3 mahl 3 mit 4 multiplicirt, giebt: $a^2 b$, oder 4. 4. 4 mit einander multiplicirt und das Product abermahl mit 3 mahl 5 multiplicirt kan heissen: $a^3 bc$, oder: 3 mahl 3 mit 4 mahl 4 mahl 4 multiplicirt giebt: $a^2 b^3$, und so dieses Product abermahl mit 3 mahl 4 multiplicirt werden sol, so erhält man: $a^2 b^3 ab$.

Denn bei einer Vorgabe müssen gleiche Zahlen gleiche Buchstaben haben (§. 24).

§. 31. **Complexe Grössen** (§. 19) nennet man diejenige Grössen, welche aus verschiedenen incomplexen Grössen (§. 20 u. f.) zusammen gesezet und miteinander verbunden werden, da dann die zusammengesezte Grössen alsdann **Glieder der complexen Grösse** heissen, und entweder **positive** oder **negative Glieder** sind.

§. 32. Bestehen die Glieder aus positiven, das sind würklich vorhandene Grössen, als womit man es

bisher zu thun gehabt, so wird einem jeden das Zeichen $+$, plus genant, vorgesezet, das erste Glied ausgenommen, welches ohne das allezeit positiv ist.

Z. E. Es seien 100 Thaler $= a$, 6 fl $= b$, 3 ℔ $= c$ und etliche Ehlen $= x$, so ist die Zusammensez- oder Verbindung also:

$$a + b + c + x$$

§. 33. Hat man aber negative, das sind mangelnde Grössen, zusammen zu sezen, so wird einer jeden das Zeichen $-$, minus genant, vorgesezet, welches auch von dem ersten Glied zu verstehen ist.

Z. E. Es wäre ein Mangel oder eine Schuld von 100 Thlr, item von 6 fl, it. von 3 ℔, it. von etlichen Ehlen, zusammen zu sezen und miteinander zu verbinden, so geschähe es also:

$$-a - b - c - x$$

§. 34. Sind verschiedene positive und negative Grössen untereinander zu bezeichnen, so verstehet es sich von selbsten, daß einer jeden ihr gehöriges Zeichen vorgesezet werden müsse, ausgenommen dem ersten Glied, wenn es nemlich positiv ist (§. 32).

Z. E. Wann bei vorstehender Formel a und c positiv, b negativ und x positiv wäre, so müste die Bezeichnung also sein:

$$a - b + c + x$$

§. 35. Nebst den jezt bemeldten negativen Grössen kommen bei der Algebra auch negative Exponenten (§. 29) vor, das sind mangelnde Graden einer Potenz, von welchen inskünftige das Eigentliche bekant gemacht werden sol.

Die Bezeichnung ist z. E. a^{-1}, a^{-2}, it. b^{-4} u. s. f.

§. 36. Befinden sich in einer Vorgabe gleiche Zahlen, so müssen solche auch mit gleichen Buchstaben bezeichnet (§. 30) und nur, ob sie positiv oder negativ sind, mit den gehörigen Zeichen richtig bemerket werden.

Z. E. 6 Thlr. $4\frac{1}{2}$ fl weniger 6 Thlr. und wieder darzu etliche Ehlen können heissen:

$$a + b - a + x$$

§. 37. Sind gleichnahmige Zahlen vorhanden, die aber in Ansehung des Mehrfachen einander ungleich sind, so werden solche, wie vorhin, mit gleichen Buchstaben bezeichnet, einer jeden ihre Zahl aber mittelst einer gemeinen Ziffer darvor gesezet, welche Zahl Coefficient genennet wird, und als ein Multiplicator oder Factor (§. 22) angesehen werden kan.

Z. E. 6 Thlr. 5 fl, 4 Thlr. weniger 4 fl, $\frac{5}{6}$ Thlr. und etliche ℔ werden bezeichnet:

$$6a + 5b + 4a - 4b + \tfrac{5}{6}a - x$$

§. 38. Ist eine Grösse einfach bezeichnet (§. 32 u. f.) und also ohne Coefficient, so erfordern doch öfters die Fälle, daß man sich 1 als einen Coefficienten darvor vorstelle, oder würklich darvor schreibe, in welchem Fall dasselbe öfters als ein Multiplicator oder Factor angesehen werden muß.

Z. E. $1a + 1b - 1c + 1x$, oder $1ab + 1cd$ u. s. f.

§. 39. Bestehet eine Zahl aus Sorten, die zu grössern Theilen ihres Ganzen gemacht werden können, so muß man nicht unterlassen, solche zu reduciren.

Z. E. Man hätte in einer Vorgabe: 22 kr. 2 ℌ, weniger 12 kr. ferner 75 ℔ Ergew. weniger verschiedene Ducaten, so wären 22 kr. 2 ℌ = $\frac{1}{4}$ Thlr. 12 kr. = $\frac{1}{5}$ fl, 75 ℔ = $\frac{3}{4}$ Ct. und könten nur schlechthin heissen: $a - b + c - x$

§. 40. Gleiche Bewandnis hat es mit einer mehrerleinahmigen Zahl, wenn man sie zu einer vermischten Zahl reduciren kan.

Z. E. 4 fl 5 Bazen, 4 Ct. 54 ℔ Klgw. 3 Thlr. 67 kr. 2 ℌ, sind $4\frac{1}{3}$ fl, $4\frac{1}{2}$ Ct. $3\frac{3}{4}$ Thlr. und werden bezeichnet:

$$a + b + c$$

§. 41. Ist aber eine Reduction zu grössern Theilen nicht thunlich, so kan man alsdann die Zahl stehen lassen, oder solche zu gleichen Sorten resolviren.

Z. E. 1 fl, 13 kr. können sein: 73 kr. 4 Ct. 23 ℔ einerleinahmig: 423 ℔, und können allezeit mit a und b bezeichnet werden.

§. 42. Aus der bisherigen Anweisung, die Zahlen mit Buchstaben zu bezeichnen, erkennet man nunmehro deutlich genug, wie denen Buchstaben vermög einer Vorgabe zwar anfänglich gewisse Wehrte zugeeignet werden, hernach aber bei der Rechnung mit denselben lediglich als unbestimte Grössen (§. 12) betrachtet werden müssen.

§. 43. Gleichwie nun die Glieder einer complexen Grösse (§. 31) in ihrer Beschaffenheit voneinander unterschieden sind, also bedürfen sie auch, eben wie die Factoren einer Grösse (§. 22), keiner gewissen Stellen.

Z. E. Die Glieder der complexen Grösse: $c - 3b + a^3 - d$ können auch stehen: $a^3 - 3b + c - d$, oder: $- 3b + a^3 + c - d$ u. s. f. wobei dem a^3, weil solches Glied nicht vorne geblieben, $+$ gegeben, und dem $- 3b$, weil es vorne zu stehen kam, sein Zeichen $-$ vorgesezet werden muste, denn sonsten würde dieses Glied positiv geworden sein (§. 32 u. f.).

§. 44. Komt es übrigens einem Anfänger unbegreiflich vor, wie eine complexe Grösse aus unterschiedenen und ungleichnahmigen Dingen bestehen könne, so muß er sich nur aus den vorhergehenden Paragraphen erinnern, daß ein jedes Glied von eigener Beschaffenheit sei, mithin die Glieder zwar miteinander verbunden (§. 31 u. f.), keinesweges aber miteinander vermischet werden, eben wie eine Grösse oder ein Vermögen aus Geld, Korn, Wein, Aeker und dergleichen bestehen kan, ohne daß eines mit dem andern, in Ansehung des Wesens, eine Gemeinschaft hat.

§. 45. Da nunmehro alles, was zur Bezeichnung der Zahlen mit Buchstaben gehöret, deutlich gezeiget und gesaget worden, so ist nun nöthig zu wissen, wie die Buchstaben einer incomplexen Grösse (§. 20 u. f.) und die Glieder einer complexen Grösse (§. 31 u. f.), in so ferne es thunlich ist, auf wenigere Buchstaben und Glieder gebracht und reducirt werden, als welches durch die ganze Algebra beobachtet werden muß.

Vom

Reduciren.

§. 46.

Wann eine incomplexe Grösse (§. 20) gleiche Factoren oder Buchstaben enthält, so werden solche zusammen gezogen und zu Potenzen erhoben (§. 28).

Z. E. $a\,c\,b\,b\,a\,c$ giebt die Formel: $a^2\,b^2\,c^2$
$a\,b\,c\,b\,c\,b$ „ „ „ $a\,b^3\,c^2$

§. 47. Hat einer von den gleichen Buchstaben *bereits* einen Exponenten (§. 29), so wird der Exponent so oft um 1 mehr, als ein gleicher Buchstab oder Factor darzu gethan wird (§. 28).

Z. E. $a^2\,b\,a\,b^3$ giebt die Formel: $a^3\,b^4$
$a\,b^2\,c\,b\,c^4$ „ „ „ $a\,b^3\,c^5$

§. 48. Haben verschiedene gleiche Buchstaben Exponenten, so werden solche, aus eben dem vorhin angezeigten Grund, daß der Exponent allezeit um 1 mehr werde, nur addirt.

Z. E. $b^2\,b^3\,b$ giebt die Formel: b^6
Denn bb und bbb und b zusammen gesezet und also miteinander multiplicirt (§. 24), thun $bbbbbb$, mithin, nach §. 28, b^6.

Item $a^2\,b^3\,a^2\,b^2$ giebt die Formel: $a^4\,b^5$
$a^2\,b^2\,c^3\,a^2$ „ „ „ $a^4\,b^2\,c^3$

§. 49. Stehet einem oder dem andern Buchstaben ein Coefficient vor, so wird derselbige schlechterdings beibehalten, indem er als ein bestimter Factor (§. 37) angesehen, und alsdann, Deutlichkeit halber, vorangesezet werden kan.

Z. E. $a\,b\,3\,a\,b$ ist reducirt: $3\,a^2\,b^2$

§. 50.

§. 50. Befindet sich in einem Product mehr als ein Coefficient, so müssen solche als bestimte Factoren miteinander multiplicirt und ihr Product als ein Factor vorgesezet werden.

Z. E. $a^2 4b 3c$ giebt: $12a^2bc$
$a^2 4b 5a$ = = $20a^3b$

§. 51. Bestehen Coefficienten in gebrochenen Zahlen, so wird damit, wie vorhin §. 49 und 50 gezeiget worden, verfahren.

Z. E. $a^2 \frac{3}{4} b a$ giebt: $\frac{3}{4} a^3 b$
$a \frac{1}{3} b \frac{1}{4} a$ macht die Formel: $\frac{1}{12} a^2 b$, denn $\frac{1}{3}$ mahl $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{12}$
$a \frac{1}{3} b \frac{1}{4} a \frac{1}{2} b$ giebt: $\frac{1}{24} a^2 b^2$, denn $\frac{1}{3}$ mahl $\frac{1}{4}$ mahl $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{24}$
$1\frac{1}{2} a 3 ab$ macht: $4\frac{1}{2} a^2 b$, denn 3 mahl $1\frac{1}{2}$ ist $4\frac{1}{2}$

§. 52. Befindet sich bei gleichen Buchstaben einerseits ein negativer Exponent (§. 35), so wird derselbe, wie §. 47, so oft um 1 mehr, das ist, ihme so oft ein Mangel (§. 33) weggethan, als ein gleicher Buchstab hinzugethan wird.

Z. E. $a^{-4} a$ giebt reducirt: a^{-3}
$a^{-3} abb$ = = = $a^{-2} b^2$
$b^2 bc^{-2} c$ = = = $b^3 c^{-1}$
$b^{-1} b$ = = = b^0 oder 1
$a^{-1} a^0$ = = = a^0 oder 1

§. 53. Die Beschaffenheit der negativen Exponenten wird begreiflich, wann man eine Potenz nach ihren Graden bis auf mangelnde, d. i. negative Exponenten zurük sezet und degradiret.

Z. E. Die zum vierten Grad erhabene Potenz wird also zurük gesezet:

$a^4 \; a^3 \; a^2 \; a^1 \; a^0 \; a^{-1} \; a^{-2} \; a^{-3} \; a^{-4}$

Dabei folgendes zu merken ist:

a) Die Wurzel ist nach Masgab eines Vorfalls: 1. 2. 3. 4 u. s. und wird mit *a. b. c. d.* u. s. bezeichnet (§. 11, 29).

b) a^1 ist nach der aufsteigenden Ordnung der erste Grad, und zugleich die Wurzel von der Potenz.

c) Der Exponent 1 ist nicht nöthig, indeme a, und überhaupt ein jeder Buchstab, schon eine Zahl vorstellet, welche der erste Grad von einer Potenz ist, oder sein kan; jedoch ist nöthig, sich den Exponenten 1, wie den Coefficienten 1 (§. 38), immer vorzustellen, oder auch zu bezeichnen.

d) a^0 ist nur um der absteigenden Ordnung wegen also bezeichnet, und heisset a ohne Grad, welches nichts anders als 1 sein kan, folglichen nur der Grund von einem Grad ist (§. 21).

e) a^{-1} ist so viel, als $\frac{1}{a}$, wie hiernächst folget.

f) So viel als der Exponent Graden anzeiget, zu welchen eine Wurzel erhaben ist, so viel Graden zeiget ein negativer Exponent an, welche einer Potenz mangeln.

g) Werden positive und negative Exponenten addirt, so zeiget die Summe an, wie viel Grade eine Potenz grösser oder kleiner sei, als die andere.

Z. E. a^1 und a^{-1} sind 2, mithin ist a^1 2 Grad grösser als a^{-1}, und a^{-1} ist um 2 Grad kleiner, als a^1 u. s. f.

Folgendes Täfelein machet Vorstehendes begreiflich, dabei $a = 3$ genommen worden:

a^4	a^3.	a^2.	a^1.	a^0.	a^{-1}.	a^{-2}.	a^{-3}.	a^{-4}.
$\frac{aaaa}{1}$.	$\frac{aaa}{1}$.	$\frac{aa}{1}$.	$\frac{a}{1}$.	1.	$\frac{1}{a}$.	$\frac{1}{aa}$.	$\frac{1}{aaa}$.	$\frac{1}{aaaa}$.
81.	27.	9.	3.	1.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{9}$.	$\frac{1}{27}$.	$\frac{1}{81}$.

§. 54. Hiernach können nun alle Producten der Potenzen, sie mögen als Factoren beschaffen sein wie sie wollen, begreiflich reducirt werden, wann man nur die Regel §. 47 u. f. merket: daß die Exponenten reducirt werden müssen.

§. 55. Hat also bei dem Product zweier Potenzen der eine Factor einen positiven und der andere einen negativen Exponenten, so geschiehet die Reduction: wann man vom negativen Exponenten so viele Grade wegthut,

als

als vom positiven Exponenten darzu gethan werden können, d. i. in so viel derselbige bestehet.

Z. E. Das Product $a^{-3}a^{2}$ ist reducirt a^{-1}; Dann wann zu dem Mangel von 3 würklich 2 gethan werden, so bleibt natürlicher Weise noch ein Mangel von 1.

Item:	$a^{-3}a^{3}$	reducirt, komt:	a^{0}	oder 1
	$a^{-2}a^{3}$	" " "	a^{1}	oder a
	$a^{-1}a^{3}$	" " "	a^{2}	
	$a^{-1}a^{4}$	" " "	a^{3}	
	$a^{-1}a^{1}$	" " "	a^{0}	

§. 56. **Haben bei einem Product zweier Potenzen beide Factoren negative Exponenten, so werden von dem grössern Mangel so viele Grade weggethan, als der geringere Mangel Grade hat: sind sie aber gleich, so gehen sie gegeneinander auf, und man bekomt a^{0} oder 1 (s. §. 53 d).**

Z. E.	$a^{-1}a^{-1}$	ist reducirt a^{0} oder 1
	$a^{-2}a^{-2}$	ebenfals
	$a^{-1}a^{-2}$	giebt a^{-1}
	$a^{-2}a^{-3}$	" " a^{-1} u. s. f.

Dann nach §. 48 wird $a^{3}a^{2} = a^{5}$, mithin a^{3} um 2, oder a^{2} um 3 Grad grösser. Hier aber wird $a^{-2}a^{-3} = a^{-1}$, mithin a^{-3} um 2, oder a^{-2} um 3 Grad grösser, d. i. der Mangel kleiner.

§. 57. **Hat eine complexe Grösse Glieder, deren Buchstaben oder Factoren sich reduciren lassen, wie bisher gezeiget worden, so muß solches nicht unterlassen werden.**

Z. E. $$\frac{abb + cc^{2} - 2acdc + b^{2}cbc}{ab^{2} + c^{3} - 2ac^{2}d + b^{3}c^{2}}$$

§. 58. **Enthält eine complexe Grösse Glieder von gleichen Buchstaben und Zeichen, so zählet man dieselbige zusammen, bemerket ihre Zahl mit einem Coefficienten, und sezet dem Glied ihr Zeichen vor.**

Z. E. $$\frac{a - b + 2a + 3cd + 4a - 2\tfrac{1}{8}b + 2cd - ab - ab}{7a - 3\tfrac{1}{8}b + 5cd - 2ab}$$

Dann 1. 2 und 4 a thun $7a$: ferner $-b$ und $-2\tfrac{1}{8}b$ thun $-3\tfrac{1}{8}b$, und $3cd$ und $2cd$ geben $5cd$, und $-ab-ab$ geben $-2ab$.

§. 59. Haben vorbemeldte gleiche Buchstaben der Glieder gleiche Exponenten, so werden die Buchstaben, wie vorhin, zusammen gezogen und ein Exponent beibehalten, bei ungleichen Exponenten aber findet keine Reduction statt.

Z. E. $\dfrac{a - 2b + a^2 - b + a^2}{a - 3b + 2a^2}$

Item $\dfrac{3a^3 - b^2 + a^3 - b^2}{4a^3 - 2b^2}$

Item $\dfrac{4b - a^2c + b - a^2c + 2b}{7b - 2a^2c}$

Item $\dfrac{a^{-2} + b + a^{-2} + b}{2a^{-2} + 2b}$

Item $\dfrac{a - b^{-3} + 3a - b^{-3}}{4a - 2b^{-3}}$

§. 60. Sind Glieder von gleichen Buchstaben, aber von ungleichen Zeichen vorhanden, so wird das negative Glied vom positiven Glied subtrahirt: oder bei mehreren Gliedern zählet man erst die Glieder von gleichen Zeichen, wie vorhin, zusammen, subtrahirt die kleinere Zahl der Glieder von der grössern Zahl, und sezet alsdann dem Unterschied das Zeichen der grössern Zahl vor, wobei natürlich folget, daß gleiche Glieder von ungleichen Zeichen einander aufheben und also von der Grösse weggethan werden müssen, welches auch von gemeinen Zahlen oder Gliedern zu verstehen ist.

Z. E. $\dfrac{2a - a}{\text{ist } a}$ Item $\dfrac{4b - 2b}{\text{ist } 2b}$

Denn von $2a$ ein a weggethan bleibt ein a, und $2b$ von $4b$ weggethan bleiben $2b$

Item $\dfrac{a + b - 4\frac{1}{4}a + 2b - 3cd - 3b + 4cd}{\text{ist red.} - 3\frac{1}{4}a + cd}$

Bei den Gliedern a wurde von dem Mangel $4\frac{1}{4}a$ gegen $1a$ ein Mangel weggethan, so bliebe noch ein Mangel von $3\frac{1}{4}a$

Die Glieder b machten $3b$, welche gegen $-3b$ wegfielen.

Von $4cd$ das negative Glied $3cd$ weggethan, blieben cd

Item $\overline{a - 4a + 4 + a - 2}$
giebt $-2a + 2$
Item $\overline{a^2 + b^3 - 4\frac{1}{4}a^2 + 2b^3}$
ist $-3\frac{1}{4}a^2 + 3b^3$
Item $\overline{a^{-2} + b^{-3} - 4\frac{1}{4}a^{-2} - 2b^{-3}}$.
wird $-3\frac{1}{4}a^{-2} - b^{-3}$

Kommen unbekante Potenzen vor (§. 24. 28), so werden solche eben wie bekante Potenzen behandelt (§. 21).

§. 61. Wann eine Grösse reduciret worden, so verstehet es sich von selbsten, daß dieselbige eben den Wehrt noch haben müsse, als sie zuvor gehabt: derowegen können Anfängere die Probe darauf machen, wann sie die Buchstaben der Grösse nach Willkühr mit gemeinen Zahlen bestimmen (§. 12), und vermög derselben erst die unreducirte und alsdann auch die reducirte Grösse in sothane gemeine Zahlen resolviren, da dann, wann die Reduction richtig ist, beide Zahlen gleich kommen müssen.

Z. E. Es sei die Grösse : $a^2 + b^3 - 4\frac{1}{4}a^2 + 2b^3$, mithin ist ihre Reduction: $-3\frac{1}{4}a + 3b^3$

Bestimt man nun $a = 2$ und $b = 3$, so ist die Resolution der unreducirten Grösse:

$$
\begin{array}{rcr}
a^2 & = & 4 \\
b^3 & = & 27 \\ \hline
 & & 31 \\
-4\frac{1}{4}a^2 & = & -17 \\ \hline
 & & 14 \\
2b^3 & = & 54 \\ \hline
 & & 68
\end{array}
$$
der Wehrt von der Grösse.

und die Resolution der reducirten Grösse:

$$
\begin{array}{rcr}
-3\frac{1}{4}a^2 & = & -13 \\
3b^3 & = & 81 \\ \hline
 & & 68
\end{array}
$$
der Wehrt; denn der Mangel 13 lässet von 81 übrig 68

Damit sich nun Anfängere die Beschaffenheit der algebraischen Grösserechnungen und deren Resolutionen desto bekanter machen und darinnen eine Fertigkeit bekommen mögen, so können sie inskünftige bei jeder Rechnungsart auf solche Weise eine Probe derselben mit gemeinen Zahlen anstellen.

Vom

Vom

A d d i r e n.

§. 62.

Wann bei einer Vorgabe die Grössen nach der gegebenen Anweisung mit Buchstaben bezeichnet (§. 21 u. f.), und dabei, ob sie positiv oder negativ sind (§. 32 u. f.), richtig bemerket worden, so werden alsdann dieselbige mit ihren Zeichen, Exponenten und Coefficienten, nur schlechthin nebeneinander gesezt, und damit die Addition würklich verrichtet, worauf, wenn es thunlich ist, die zusammengesezte Grösse nach denen gegebenen Regeln §. 46 u. f. reduciret wird.

§. 63. Es komt also hauptsächlich auf die Reduction der zusammengesezten oder addirten Grössen an, welche §. 46 u. f. nach allen Arten der Grössen deutlich gezeiget worden, folglichen desfals weiter keine Regeln hier gegeben werden können.

Z. E. Wann folgende incomplexe Grössen addiret werden solten:

$4\frac{1}{3}$ Thlr. weniger 4 Ehl, $3\frac{1}{4}$ Thlr. $4\frac{2}{3}$ ℔, ein Mangel von $6\frac{1}{2}$ ℔, $3\frac{1}{8}$ Ehl und etliche Thlr.

und man benennete die Thlr. mit a, die Ehlen mit b, die ℔ mit c, und die unbekante Thlr. mit x, so wäre die Addition:

$$\frac{4\frac{1}{3}a - 4b + 3\frac{1}{4}a + 4\frac{2}{3}c - 6\frac{1}{2}c + 3\frac{1}{8}b + x}{7\frac{7}{12}a - \frac{7}{8}b - 1\frac{5}{6}c + x}$$ Ist die Summe.

Also wäre der Betrag oder die reducirte Summe dieser zusammengesezten Grössen: $7\frac{7}{12}$ Thlr. und noch eine unbekante Zahl von Thlr. dagegen ist ein Mangel von $\frac{7}{8}$ Ehl und $1\frac{5}{6}$ ℔ vorhanden.

§. 64. Sind complexe Grössen zu addiren, so werden solche, wie vorhin die incomplexe Grössen, mit ihren Zeichen nur schlechthin nebeneinander gesezt, und alsdann, so es thunlich ist, reducirt.

Z. E. $2a + a - b$ wird zu $- b + a$ addirt:

$$\frac{2a + a - b - b + a}{4a - 2b}$$

§. 65. Zuweilen erfordert der Sachen Beschaffenheit, die Addition etlicher complexer Grössen also anzudeuten:

$$(2a + a - b) + (- b + a)$$

§. 66. Es ist also das Zeichen $+$ nicht nur ein Zeichen würklich vorhandener Grössen (§. 32), sondern auch zugleich ein Additionszeichen, welches anzeiget, daß eine Grösse zu einer andern Grösse gethan sei.

§. 67. Durch dieses Zeichen pfleget man auch gemeine Zahlen zu addiren, und die Summe mit $=$ zu bezeichnen (§. 26. 27).

Z. E. $4 + 12 = 16 + 8 = 24 + 30 = 54$

Vom

Subtrahiren.

§. 68.

Wann Grössen zu subtrahiren sind, so werden solche, wie bei der Addition, jedoch unter contrairen Zeichen, dem Subtrahenden nur schlechthin beigesezet und somit die Subtraction würklich verrichtet, also, daß die erhaltene Formel die Differenz oder der Unterschied ist, welcher alsdann, so es thunlich, reduciret wird (§. 46 u. f.).

§. 69. Es komt also hier, wie bei dem Addiren, blos auf die Reduction an (§. 63), welche §. 46 u. f. ausführlich gezeiget worden, folglichen man hier nur auf das contraire Zeichen zu merken hat.

§. 70. **Wann demnach eine incomplexe positive Grösse subtrahirt werden sol**, so geschiehet das Anfügen unter dem Zeichen —

Z. E. Von $140\frac{1}{2}$ Thlr. sollen $36\frac{3}{4}$ Thlr. subtrahirt werden. Nennet man die Thlr. a, so ist die Subtraction und der würkliche Unterschied:

$$140\tfrac{1}{2}\,a - 36\tfrac{3}{4}\,a$$

und reducirt: $103\frac{3}{4}\,a$

Item von 100 Thlr. 6 Carolinen sollen subtrahirt werden: 56 Thlr. 7 Carolinen und 50 ℔.

Nennet man die Thlr. a, die Carolinen b, und die ℔ c, so ist die Subtraction:

$$100\,a + 6\,b - 56\,a - 7\,b - 50\,c$$
$$44\,a - b - 50\,c$$

Also bleiben übrig 44 Thlr. dabei aber noch ein Mangel von einer Carolin und 50 ℔ ist.

§. 71. **Ist aber eine incomplexe negative Grösse zu subtrahiren, so geschiehet solches unter dem Zeichen +**

Z. E. Man hätte 4 Thlr. weniger 50 kr, und solte davon subtrahiren 2 Thlr. weniger 40 kr, so könten die Thlr. *a* und die Kreuzer *b* heissen, mithin wäre die Subtraction:

$$\frac{4a - 50b - 2a + 40b}{2a - 10b}$$

und der reducirte Rest: 2 Thlr. weniger 10 kr. oder 1 Thlr. 80 kr.

Item: Von — 10 Thlr. sollen — 12 Thlr. subtrahirt werden, so geschiehet es also:

$-10a + 12a$ ist reducirt $2a$

§. 72. Wann also bei einer Vorgabe die Rede von einem Mangel, nemlich von einer negativen Grösse, ist, welche weggethan werden sol, so begreift man ganz leicht, daß es unter dem Zeichen + geschehen müsse, indeme ja eine Grösse oder ein Vermögen allezeit um so viel mehr wird, als man einen Mangel oder eine Schuld wegschaffet.

Z. E. Von 100 Carolinen sollen 50 Thlr. weniger 3 Ducaten ausgegeben werden: nennet man die Carolinen *a*, die Thlr. *b* und die Ducaten *c*, so ist die Subtraction:

$100a - 50b + 3c$

Denn da von 100 Carolinen 50 Thlr. weggethan werden solten, weniger 3 Ducaten, so wurden durch Subtrahiren der 50 Thlr. 3 Ducaten zuviel weggethan, welche wieder hinzugethan werden musten.

§. 73. **Ist eine complexe Grösse zu subtrahiren, so kan solches nicht auf einmahl, wie bei dem Addiren, geschehen (§. 64), sondern es muß ein jedes Glied des Subtractoren dem Subtrahenden unter contrairem Zeichen besonders beigesezet werden, worauf gewöhnlich, so es thunlich ist, reducirt wird.**

Z. E. Von 4 Carolinen, $3\frac{1}{2}$ Ct. weniger 2 fl. sollen subtrahirt werden: 3 Carolinen, $4\frac{1}{8}$ Ct. weniger $2\frac{1}{8}$ fl, dabei die Carolinen *a*, die Ct. *b* und die fl. *c* heissen sollen:

$$\frac{4a + 3\tfrac{1}{2}b - 2c - 3a - 4\tfrac{1}{8}b + 2\tfrac{1}{8}c}{a - \tfrac{5}{8}b + \tfrac{1}{8}c}$$

§. 74. Zuweilen erfordern die Umstände, die Subtraction complexer Grössen also anzudeuten:

$$(4a + 3\tfrac{1}{2}b - 2c) - (3a + 4\tfrac{1}{8}b - 2\tfrac{1}{8}c)$$

§. 75. Es ist also das Zeichen — nicht nur ein Zeichen manglender Grössen (§. 33), sondern auch ein Subtractionszeichen, welches andeutet, daß eine Grösse von einer andern Grösse weggethan sei.

§. 76. Durch dieses Zeichen pfleget man auch gemeine Zahlen zu subtrahiren und den Unterschied mit = zu bezeichnen (§. 67).

Z. E. $48 - 9 = 39 - 12 = 27 - 13 = 14 - 14 = 0$

Damit der Raum ersparet werde, so wird man bei den folgenden Specien nicht erst die Grössen in benanten Dingen, sondern sogleich Buchstaben als unbenante oder unbestimte Grössen geben (§. 12), gleich wie man bei der gemeinen Rechenkunst erst die Specien mit unbenanten Zahlen zu lehren pfleget.

Vom

Multipliciren.

§. 77.

Wann incomplexe Grössen miteinander multipliciret werden sollen, sie mögen beschaffen sein, wie sie wollen (§. 20 u. f.), so werden solche nur ohnmittelbar nebeneinander gesezet, und also die Multiplication würklich verrichtet (§. 22 u. f.), worauf das Product nach §. 46 u. f. so es thunlich ist, reduciret wird.

§. 78. Wegen dem Zeichen + oder — aber, so einem oder dem andern Factoren vorstehet, hat man folgende zwo Regeln zu beobachten:

1) Haben beide Factoren gleiche Zeichen, sie mögen + oder — sein, so wird dem Product + vorgesezet;

2) Haben sie aber ungleiche Zeichen, so bekomt das Product —

dabei zu merken ist, daß einer incomplexen Grösse und dem ersten Glied einer complexen Grösse nur im negativen Fall das Zeichen — vorgesezet werde, weil beide allezeit ohne Zeichen für positiv genommen werden (§. 32. 33).

§. 79. Auch hier komt es nach geschehener Multiplication, wie bei dem Addiren (§. 63) und Subtrahiren (§. 69), auf die Reduction an, welche §. 46 u. f. ausführlich gezeiget worden.

§. 80. Damit nun Anfängere sothane Reduction der Producten desto besser zur Uebung bringen können, so folgen alle Multiplicationsfälle incomplexer Grössen nach den Regeln der Reductionen §. 46 ⸗ 56 in der angenommenen Ordnung.

1) Coefficienten vor gleichen oder ungleichen Buchstaben werden multiplicirt (§. 49 u. f.).

Z. E.	$3a$	mit	$1bc$	multiplic. giebt	$3a\,1bc$	und reducirt $3abc$
	$2ab$	⸗	$3\frac{1}{2}cd$	⸗ ⸗ ⸗	$2ab\,3\frac{1}{2}cd$	⸗ ⸗ ⸗ $7abcd$
	$2bc$	⸗	$\frac{1}{2}a$	⸗ ⸗ ⸗	$2bc\,\frac{1}{2}a$	⸗ ⸗ ⸗ $1abc$
	$\frac{1}{3}a$	⸗	$\frac{1}{4}b$	⸗ ⸗ ⸗	$\frac{1}{3}a\,\frac{1}{4}b$	⸗ ⸗ ⸗ $\frac{1}{12}ab$
	$2a2b$	⸗	$3c$	⸗ ⸗ ⸗	$2a2b3c$	⸗ ⸗ ⸗ $12abc$
	$1\frac{1}{2}a$	⸗	$2\frac{1}{3}b$	⸗ ⸗ ⸗	$1\frac{1}{2}a\,2\frac{1}{3}b$	⸗ ⸗ ⸗ $3\frac{1}{2}ab$
	a	⸗	4	⸗ ⸗ ⸗	$4a$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗
	ax	⸗	$2\frac{1}{2}$	⸗ ⸗ ⸗	$2\frac{1}{2}ax$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗

2) Gleiche Buchstaben werden zu Potenzen erhoben (§. 46).

Z. E.	a	mit	a	multiplicirt giebt	aa	und reducirt a^2
	$\frac{1}{2}x$	⸗	$\frac{1}{4}x$	⸗ ⸗ ⸗	$\frac{1}{2}x\,\frac{1}{4}x$	⸗ ⸗ ⸗ $\frac{1}{8}x^2$
	aa	⸗	a	⸗ ⸗ ⸗	aaa	⸗ ⸗ ⸗ a^3
	$2ab$	⸗	$3a$	⸗ ⸗ ⸗	$2ab\,3a$	⸗ ⸗ ⸗ $6a^2b$
	$-a$	⸗	ab	⸗ ⸗ ⸗	$-aab$	⸗ ⸗ ⸗ $-a^2b$
	$-ab$	⸗	$-abx$	⸗ ⸗ ⸗	$ababx$	⸗ ⸗ ⸗ a^2b^2x

3) Positive Exponenten bei gleichen Buchstaben werden addirt (§. 47. 48).

Z. E.	a^2	mit	a	mult. giebt	a^2a	u. red. a^3
	$3a^2$	⸗	a^3	⸗ ⸗	$3a^2a^3$	⸗ ⸗ $3a^5$
	a^2b	⸗	ab^3	⸗ ⸗	a^2bab^3	⸗ ⸗ a^3b^4
	a^3	⸗	a^0	⸗ ⸗	a^3a^0	⸗ ⸗ $a^3\,1$ oder: nur a^3 (s. §. 53 d)
	$-a$	⸗	-1	⸗ ⸗	$1a$	oder: nur a
	a	⸗	-1	⸗ ⸗	$-1a$	oder: nur $-a$ (s. §. 38).

4) Positive und negative Exponenten werden subtrahirt, und dem Unterschied das Zeichen des Grössern gegeben, wobei, wenn derselbe positiv ist, ihme kein + gegeben wird: sind sie aber gleich, so heben sie einan⸗

der auf, und das Product bekomt bei der Reduction anstatt des Exponenten o (§. 52 u. f.).

Z. E. a^{-1} mit a^3 mult. giebt $a^3 a^{-1}$ u. reduc. a^2
a^{-1} „ a^4 „ „ $a^4 a^{-1}$ „ „ a^3
$a^{-2} b$ „ a^3 „ „ $a^3 b a^{-2}$ „ „ $a^1 b$ oder ab
$a^{-3} b$ „ $a^3 b$ „ „ $a^3 b b a^{-3}$ „ „ $a^0 b^2$ oder $1 b^2$
$2a^{-1}$ „ $3a^1$ „ „ $2a^{-1} 3a^1$ „ „ $6a^0$ d. i. 6 (§. 53 d)
a^{-1} „ a^1 „ „ $a^{-} a^1$ „ „ a^0 „ 1

5) Negative und negative Exponenten werden, wie vorhin, subtrahirt und dem Unterschied — vorgesezt, sind sie aber einander gleich, so hxben sie einander auf (§. 56).

Z. E. a^{-1} mit a^{-1} mult. giebt $a^{-1} a^{-1}$ u. reduc. a^0 oder 1
a^{-1} „ a^{-2} „ „ $a^{-1} a^{-2}$ „ „ a^{-1}
$2a^{-2}$ „ a^{-4} „ „ $2a^{-2} a^{-4}$ „ „ $2a^{-2}$
$2a^{-3}$ „ $3a^{-1}$ „ „ $2a^{-3} 3a^{-1}$ „ „ $6a^{-2}$

Nota I. Solte bei einer Vorgabe z. E. gesagt werden: Wie viel ist $\frac{1}{2}$ aus $\frac{2}{3}$? oder: $\frac{1}{2}b$ aus $\frac{2}{3}a$? oder auch: Wie viel ist $\frac{3}{4}b$ von $\frac{5}{6}a$? u. s. f. so ist solches die Multiplication, wie vorhin N. 1 u. 2 mit Brüchen, welche mit der Division nicht vermischet werden muß (s. §. 98 Nota I.).

Nota II. Wer die Multiplication und Reduction zugleich verrichten kan, braucht nicht erst die Grössen schlechthin zusammen zu sezen.

§. 81. Ist eine complexe Grösse (§. 31.) mit einer incomplexen Grösse (§. 77.) zu multipliciren, so wird ein jedes Glied der complexen Grösse und der Multiplicator also ohnmittelbar nebeneinander gesezet, wie solches vorhin gezeiget worden, dabei die wegen der Zeichen gegebenen zwo Regeln (§. 78) nur beobachtet werden müssen, nach geschehener Multiplication aber die Reduction, wo möglich, verrichtet wird.

Z. E.
$$\begin{array}{r} a + 1 \\ b \\ \hline ab + b \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ b \\ \hline ab - bb \\ \hline \text{Red. } ab - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b - a \\ a \\ \hline aa + ab - aa \\ \hline \text{Red. } a^2 + ab - a^2 \end{array}$$

§. 82.

§. 82. Man kan aber, wie vorhin angemerket worden, die Multiplication und Reduction der Buchstaben zugleich verrichten, die Reduction der Glieder aber (§. 58 u. f.) muß natürlicher Weise hernach geschehen.

Z. E.

$$\begin{array}{r} a+1 \\ a \\ \hline a^2+1a \text{ od. } a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b+c \\ c \\ \hline ac+bc+c^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b+a-b \\ a \\ \hline a^2+ab+a^2-ab \\ \hline \text{Red. } 2a^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a+b \\ b \\ \hline 2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3a-2b \\ 2a \\ \hline 6a^2-4ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\frac{1}{2}b+2c \\ ab \\ \hline 1\frac{1}{2}ab^2+2abc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b+1 \\ 1\frac{1}{3}a \\ \hline 1\frac{1}{3}a^2-1\frac{1}{3}ab+1\frac{1}{3}a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2+a \\ a^3 \\ \hline a^5+a^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a^2+1\frac{1}{2}a \\ 3a^2 \\ \hline 6a^4+4\frac{1}{2}a^3 \end{array}$$

§. 83. Ist eine complexe Grösse mit einer complexen Grösse zu multipliciren, so wird erstlich, wie vorhin, ein jedes Glied des Multiplicanden mit einem Glied des Multiplicatoren, welches es sei, multiplicirt, das ist, wie gezeiget worden, nebeneinander gesezt, und so auch mit dem zweiten, dritten Glied u. s. f. des Multiplicatoren verfahren, und sofort die Reduction, wo möglich, verrichtet, dabei sich die Regeln §. 78 von selbsten verstehen.

Z. E.

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline -ad+bd \\ ac-cb \quad\quad \\ \hline ac-cb-ad+bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+c \\ c+b \\ \hline ab+bc \\ ac+c^2 \quad\quad \\ \hline ac+ab+c^2+bc \end{array}$$

Weil ein jedes Glied für sich a part ist (§. 44), so können die multiplicirten Glieder gleich nebeneinander gesezet werden.

$$\begin{array}{r} a+4 \\ b+1 \\ \hline ab+4b+a+4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+\frac{1}{4} \\ a+\frac{1}{4} \\ \hline a^2+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{16} \\ \hline a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a + \frac{1}{2}b \\ b + \frac{1}{2}c \\ \hline 2ab + \frac{1}{2}b^2 + 1ac + \frac{1}{4}bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{1}{2}a - bc + d \\ b^2 - de \\ \hline \frac{1}{2}ab^2 - b^3c + b^2d - \frac{1}{2}ade + bcde - d^2e \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - b + c^2 \\ a^2 + c - a^2 \\ \hline a^4 - a^2b + a^2c^2 + a^2c - bc + c^3 - a^4 + a^2b - a^2c^2 \end{array}$$

Red. $a^2c - bc + c^3$

$$\begin{array}{r} a^2 - b + c^2 \\ 2a^2 + c - b^2 \\ \hline 2a^4 - 2a^2b + 2a^2c^2 + ca^2 - bc + c^3 - a^2b^2 + b^3 - b^2c^2 \end{array}$$

Hier findet keine Reduction statt.

$$\begin{array}{r} 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ 1 - 2x + x^2 \\ \hline 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 2x + 6x^2 - 6x^3 + 2x^4 + x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5 \end{array}$$

Red. $1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

Denn $-3x - 2x$ thun $-5x$, ferner $3x^2 + 6x^2 + x^2$, machen $10x^2$, $-x^3 - 6x^3 - 3x^3$ thun $-10x^3$, und endlich $2x^4 + 3x^4$ machen $5x^4$

§. 84. Solte sich bei dem Multipliciren complexer Grössen ein Fall eräugnen, der hier nicht angebracht worden, so muß solcher §. 80 aufgesuchet werden, denn man hat es hier ebenfals immer nur mit zwei incomplexen Grössen zu thun.

§. 85. Zuweilen erfordern die Vorfälle, daß die Multiplication complexer Grössen durch ein liegendes Creuz also angedeutet wird:

$$(ab + c^2) \times (ac - d)$$

Oder, wie es bei den mehresten Autoren anzutreffen, durch einen Punct:

$$(ab + c^2) \, . \, (ac - d)$$

welche Formeln anzeigen, daß $ab + c^2$ und $ac - d$ miteinander multipliciret werden sollen.

Oder, durch einen Buchstaben:

$(a + b)c$ Item: $(a - b)c$

Item:

Item: $(a+c)d$ Item: $(d-e)f$

wodurch angezeiget wird, daß die eingeschlossene Grössen mit den nebenstehenden Buchstaben multiplicirt werden sollen, und die hernach sowohl addiret, als auch subtrahirt werden können, als:

Da sie addirt werden sollen:

$$(a+b)c+(a-b)c$$

Da sie subtrahirt werden sollen:

$$(a+c)d-(d-e)f$$

Es ist also dieses nichts anders, als eine Abkürzung eines Products, dessen Glieder mit einem Buchstaben multiplicirt sind,

z. E. $bc+bd-be$ kan stehen: $(c+d-e)b$

dabei wohl zu merken ist, daß, wann dem Multiplicatoren kein Zeichen vorstehet, solcher + sei (§. 78). Denn bei der Formel: $(c+d-e)-b$ ist der Multiplictoar negativ.

Oder, da angedeutet wird, daß eine Grösse mit sich selbst multiplicirt, d. i. quadrirt sei (§. 28):

$$(a+b)^2 \quad \text{Item: } (3a+b-\tfrac{1}{2})^2$$

§. 86. Durch gedachte beide Zeichen werden bei der Algebra auch gemeine Zahlen multiplicirt (§. 25).

z. E. $2\times4=8\times5=40\times9=360$ u. s. f.
Oder: $2\cdot4=8\cdot5=40\cdot9=360$ u. s. f.

§. 87. Gleichwie bei dem Addiren das Hinzuthun, und bei dem Subtrahiren das Hinwegthun negativer Grössen begreiflich gemacht worden (§. 62. 71 u. f.), also ist es hier insonderheit nöthig, klar zu machen, was es mit der Multiplication negativer Grössen für eine Bewandnis habe.

§. 88. **Wann eine negative Grösse mit einer positiven Grösse multipliciret wird**, so ist ganz begreiflich, daß das Product negativ kommen müsse (§. 78), indeme solches ein vervielfältigter Mangel ist (§. 33).

§. 89. **Wird im Gegentheil eine positive Grösse mit einer negativen Grösse multiplicirt**, so ist es eben so begreiflich, daß das Product negativ sein müsse (§. 78), indeme es einerlei ist, ob man z. E. eine Schuld von 10 Thlr.

sechsmahl nimt, oder ob 6 Thlr. zehnmahl weniger genommen, d. i. zur zehnfachen Schuld gemacht werden.

§. 90. **Daß aber das Product zwoer negativen Grössen positiv werde** (§. 78), ist Anfängern nicht sogleich begreiflich: es hat aber seinen Grund in eben dem nächst Vorhergehenden; denn gleichwie eine Grösse verschiedene mahl zum Mangel oder zur Schuld gemacht wird, also wird hier ein Mangel verschiedene mahl weniger genommen und also positiv gemacht: denn wenn z. E. eine Schuld von 10 Thlr. d. i. — 10 Thlr. einmahl weniger genommen, d. i. mit — 1 multiplicirt wird, so fält die Schuld natürlicher Weise weg, und das Vermögen ist 10 Thlr. mehr: wird diese Schuld zweimahl weniger genommen, d. i. mit — 2 multiplicirt, so wächst dem Vermögen zweimahl 10 Thlr. zu u. s. f.

§. 91. Wil man dieses noch begreiflicher haben, so kan es durch folgendes Exempel geschehen:

Man hätte 8 weniger 2 mit 10 weniger 3 zu multipliciren, so wäre offenbar, daß die Factoren 6 und 7, und das Product 42 sei.

Nimt man nun für 8 den Buchstaben a, für 2 den Buchstaben b, für 10, c, und für 3, d, so ist die Multiplication mit Buchstaben also:

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline -da + db \\ ac - cb \qquad \\ \hline ac - cb - da + db \end{array}$$

Dieses erhaltene Product in Buchstaben wird nun in gemeine Ziffern resolviret (§. 12).

ac nemlich $8 \times 10 = 80$	$-cb$ nemlich $10 \times 2 = -20$
db „ „ $3 \times 2 = 6$	$-da$ „ „ $3 \times 8 = -24$
Summe: 86	Summe: -44
-44	
42 Das Product, wie vorhin.	

§. 92. Es scheinet zwar diese Multiplication mit Buchstaben gegen der Multiplication mit gemeinen Zahlen weitläuftig und noch von keinem Nutzen zu sein; wenn man aber dieselbige als eine Grösserechnung betrachtet, dabei auf keine Einten zu sehen nöthig ist (§. 3 u. f.), und somit auf den allgemeinen Wehrt der Buchstaben am Ende der Rechnung siehet (§. 12), so kan allerdings auf die Vortreflichkeit der Algebra bereits ein Schluß gemacht werden.

Z. E. Den Buchstaben des vorstehenden Products können alle mögliche Zahlen zugeeignet werden, als:

Es sei $a = 30\frac{1}{2}$, $b = 8$, $c = 10$ und $d = 5$

so thut ac, d. i. $30\frac{1}{2} \times 10 = 305$
$-cb$ „ $10 \times 8 = -80$
225
$-da$ „ $30\frac{1}{2} \times 5 = -152\frac{1}{2}$
$72\frac{1}{2}$
db „ $5 \times 8 = 40$
$112\frac{1}{2}$ Ist das Product nach dem willkührlich angenommenen Wehrt der Buchstaben (§. 12).

Die **Probe** auf ein Product kan gemacht werden, wann dasselbige, vermög willkührlich bestimter Buchstaben, mit einem Factoren dividirt wird, da dann der Wehrt des andern Factoren kommen muß.

Z. E. Die beide Factoren wären: $2a - b$ und $c + 2d$, mithin das Product: $2ac - cb + 4ad - 2db$, und man bestimte $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ und $d = 5$,

so würde $2ac = 16$
$-cb = -12$
4
$4ad = 40$
44
$-2db = -30$
14 Wehrt des Products.

Nimt man nun den Factoren $c + 2d$, so ist solcher $= 14$: mit diesem Wehrt jenen Werth des Products, nemlich 14, dividirt, komt 1: da nun der Wehrt des andern Factoren $2a - b = 1$ ist, denn $2a$ sind 4, und $-b$ ist 3, so ist die Multiplication recht.

Vom
Dividiren.

§. 93.

Gleichwie die Grössen miteinander multiplicirt werden, wann man solche ohnmittelbar zusammen sezet (§. 77 u. f.), also wird hier ein Product dividirt, wann man die Factoren (§. 22 u. f.) voneinander thut.

§. 94. Wann demnach eine incomplexe Grösse dividirt werden soll, so wird, nach Masgab der Vorgabe oder Auflösung, ein oder mehr, oder auch alle Factoren zum Divisor genommen, die übrige Factoren, oder im leztern Fall das 1, machen den Quotienten.

Z. E. Die incomplexe Grösse: $3ab^2$ kan dividirt werden, mit $3, a, b^2$, mit $3a, 3b^2, ab^2, ab, b$, und mit allen Factoren, also:

$3)\,3ab^2$ — $1ab^2$ Quot.; $a)\,3ab^2$ — $3b^2$ Quot.; $b^2)\,3ab^2$ — $3a$ Quot.; $3a)\,3ab^2$ — b^2 Quot.; $3b^2)\,3ab^2$ — a Quot.

$ab^2)\,3ab^2$ — 3 Quot.; $ab)\,3ab^2$ — $3b$ Quot.; $b)\,3ab^2$ — $3ab$; $3ab^2)\,3ab^2$ — 1 Quot.

§. 95. Diese algebraische Division ist nach der gemeinen Division ganz begreiflich, vermög welcher man weiß, daß eine jede componirte, d. i. zusammen gesezte Zahl durch eben die Factoren, durch welche sie entstanden, wieder dividirt und voneinander gethan werden könne.

Z. E. Wann bei dem nächst vorhergehenden Dividenden $a = 2$ und $b = 4$ genommen wird, so sind die gemeine Factoren: 3, 2, und 4, 4, und deren Product 96, welches durch 3, 2 und 4 und 8, sodann durch 6, 12, 48, 32, und 96 selbst dividirt werden kan.

§. 96.

§. 96. Wegen der Zeichen + und — hat man folgende zwo Regeln zu beobachten:

1) Haben beide, der Divisor und Dividend, gleiche Zeichen, so bekomt der Quotient +;

2) Haben sie aber ungleiche Zeichen, so wird dem Quotienten — vorgesezet.

Wobei übrigens noch zu merken ist, was §. 78 wegen dem Zeichen vor einer incompleren Grösse und dem ersten Glied einer compleren Grösse beigefüget worden.

§. 97. Es wird aber das Dividiren am leichtesten verrichtet, wann man nach gemeiner Art den Quotienten hinter eine Perpendicularlinie sezet, denselben mit dem Divisoren multiplicirt, und das Product vom Dividenden nach den Regeln der Subtraction (§. 68) wegthut, da dann der Aufhebungsfall zugleich die Probe ist, daß man recht dividirt habe; denn der Divisor und Quotient sind zween Factoren, deren Product dem Dividenden gleich ist.

§. 98. Hierbei sind viererlei Fälle zu bemerken: Einmahl, da der Divisor nur schlechthin in Absicht auf die Factoren (§. 94), dann in Absicht auf die Coefficienten, ferner auf die Exponenten, und endlich auf die Coefficienten und Exponenten genommen wird.

1) Da der Divisor blos in Absicht auf die Factoren genommen wird, wie §. 94 gezeiget worden.

Z. E. 6) $6a^3bc^2$ | a^3bc^2

$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$

0

Denn der Coefficient 6 ist ein, jedoch bestimter Factor, durch welchen, wie durch einen jeden andern Factoren, die Grösse multiplicirt ist (§. 49), folglichen kan dieselbige auch durch ihn dividirt werden.

Item: $a^3c^2)\ 6a^3bc^2 \mid 6b$

$$6a^3bc^2 - a^3c^2\,6b$$

$$0$$

Denn die Factoren können zum Divisor, wie bekant, genommen werden, wie man wil (§. 94), oder wie es eine Vorgabe und Auflösung erfordert, und brauchen dahero auch keiner gewissen Stellen (§. 22).

Item: $bc^2\,6a^3)\ 6a^3bc^2 \mid 1$

$$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$$

$$0$$

$-a^3b)\ 6a^3bc^2 \mid -6c^2$

$$6a^3bc^2 - 6c^2a^3b$$

$$0$$

$-a^3b) -6a^3bc^2 \mid 6c^2$

$$-6a^3bc^2 + 6a^3bc^2$$

$$0$$

Denn der Quotient $6c^2$ und der Divisor $-a^3b$ miteinander multiplicirt giebt $-a^3b\,6c^2$, welch negatives Product vom Dividenden unter verkehrtem Zeichen, d. i. unter + subtrahirt werden muste (§. 68).

2) Da der Divisor in Absicht auf einen Coefficienten genommen wird, und wie §. 80. 1 multiplicirt hier dividirt werden muß.

Z. E. $3)\ 6a^3bc^2 \mid 2a^3bc^2$

$$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$$

$$0$$

$8)\ 6a^3bc^2 \mid \tfrac{3}{4}a^3bc^2$

$$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$$

$$0$$

$5)\ 6a^3bc^2 \mid 1\tfrac{1}{5}a^3bc^2$

$$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$$

$$0$$

$4b)\ 6a^3bc^2 \mid 1\tfrac{1}{2}a^3c^2$

$$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$$

$$0$$

$9c^2)\ 6a^3bc^2 \mid \tfrac{2}{3}a^3b$

$$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$$

$$0$$

$3)\ 1a^3bc^2 \mid \tfrac{1}{3}a^3bc^2$

$$1a^3bc^2 - 1a^3bc^2$$

$$0$$

$\tfrac{1}{3})\ 1a^3bc^2 \mid 3a^3bc^2$

$$1a^3bc^2 - 1a^3bc^2$$

$$0$$

3) Da der Divisor in Absicht auf einen Exponenten genommen wird, und wie §. 80. 3 addirt hier subtrahirt werden muß.

Z. E. $a^2) 6a^3bc^2 \mid 6abc^2$

$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$

o

Denn da eine Potenz aus zusammengesezten gleichen Factoren bestehet (§. 28 u. f.), so kan man einen, oder etliche, oder auch alle Factoren, d. i. den ganzen Exponenten, zum Divisor nehmen, in welchem leztern Fall man in den Quotienten nur 1 sezet, weil a^0 oder b^0 u. s. f. (s. §. 53.) leicht einen Fehler verursachen kan, oder, welches am besten ist, in den Quotienten gar nichts sezet.

Z. E. $ac) 6a^3bc^2 \mid 6a^2bc$ $\quad$ $a^3c) a^3bc^2 \mid bc$

$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$ $\quad$ $a^3bc^2 - a^3bc^2$

o $\quad$ o

$a^3c^2) 6a^3 2bc^2 \mid 62b$

Da hier die zween Coefficienten 6 und 2 zusammen kamen, so gab es einen grossen Fehler, nemlich, anstatt 12, kamen 62 (s. §. 25); wäre aber der Dividend nach §. 50 reduciret worden, so hätte man solchen Fehler verhütet, als: $6a^3 2bc^2$ ist reducirt: $12a^3bc^2$, und die Division ist:

$a^3c^2) 12a^3bc^2 \mid 12b$

$a^4) 6a^3bc^2 \mid 6a^{-1}bc^2$

$6a^3bc^2 - 6a^3bc^2$

o

Da hier zum Divisor der Exponent 4 um einen Grad zu hoch genommen wurde, so muste natürlicher Weise der Quotient einen negativen, das ist mangelnden Grad oder Exponenten, nemlich a^{-1} bekommen, welches die Multiplication §. 80. 4 und die Reduction §. 55 beweiset, vermög welchen a^4 und a^{-1} miteinander multiplicirt a^4a^{-1} thut, und reducirt die Formel a^3 bringt.

$$a^3)\ a^2 \mid a^{-1}$$
$$a^2 - a^2$$
$$0$$

$$a^2)\ a^1 \mid a^{-1}$$
$$a - a$$
$$0$$

Welche Divisionen der vorhergehenden in Ansehung der Exponenten ganz gleich sind.

$$a)\ a^0 \mid a^{-1}$$
$$a^0 - a^{-1}$$
$$0$$

Hier wurde zum Divisor ein Grad, und also um so viel mehr genommen, als der Dividend hatte, mithin muste dem Quotienten ein mangelnder Grad gemacht werden, nemlich: a^{-1}, welches durch Multipliciren (§. 80. 4) und Reduciren (§. 55) für recht erwiesen worden (s. auch §. 53).

Dabei ist zugleich klar worden, daß a^0 und a^{-1} nichts anders als 1 sein können, und daß nur die auf- und absteigende Ordnung der Potenzen (§.53) und die Rechnungsarten sothane unterschiedene Formeln erfordern.

Z. E. Wann anstatt der Formel a^0 zum Dividenden 1 genommen wird, so ist die Division also:

$$a)\ 1 \mid \frac{1}{a}$$
$$1 - 1$$
$$0$$

welche Procedur die gemeine Division erkläret, da eine 1 oder auch eine jede Zahl dividiret wird, wenn man den Theiler bruchsweise darunter sezet, folglichen hiese es hier: a in 1 habe $\frac{1}{a}$, diesen Quotienten und den Divisoren wiederum nach gemeiner Weise miteinander multiplicirt, bringt zur Probe wieder 1, als:

$$\frac{a}{1} \text{ oder } \frac{1}{a} \text{ ist } \frac{a}{a}$$

welches abermahl nichts anders als 1 sein kan, weil gleiche Zähler und gleiche Nenner 1 machen.

Wendet

Wendet man vorstehende Division um, und dividiret mit dem Quotienten, so muß solches das Vorhergehende bestätigen, als:

$$\begin{array}{l} a^{-1})\ a^0 \mid a \\ \hline a^0 - a^0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Daß diese Division ihre Richtigkeit habe, beweiset zwar die Probe, da a^{-1} und a miteinander multiplicirt wieder a^0 bringt; es machet aber sothane Probe die Division noch nicht begreiflich, es sei dann, daß, wie vorhin, anstatt a^{-1} der Bruch $\frac{1}{a}$, und anstatt a^0 eine 1 genommen und die Division nach gemeiner Art verrichtet werde, also:

$\frac{1}{a}$ umgewandt $\frac{a}{1}$ mahl $\frac{1}{1}$ ist $\frac{a}{1}$ der Quotient, welcher so viele Einten bedeutet, als für die Wurzel a angenommen worden (§.24), oder es ist die Wurzel, d. i. der erste Grad einer Potenz: aus welchem Umstand ein Unterschied zwischen a^0 und a^{-1} deutlich erhellet.

Ueberhaupt kan man sich bei dieser Division die Regel machen:

Um so viel der Dividend kleiner oder grösser ist, als der Divisor, um so viel kleiner oder grösser muß auch der Quotient als der Divisor sein.

Z. E.

$$\begin{array}{l} a)\ a^{-1} \mid a^{-2} \\ \hline a^{-1} - a^{-1} \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a)\ a^{-2} \mid a^{-3} \\ \hline a^{-2} - a^{-2} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a)\ a^{-3} \mid a^{-4} \\ \hline a^{-3} - a^{-3} \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a)\ a^{-4} \mid a^{-5} \\ \hline a^{-4} - a^{-4} \\ \hline 0 \end{array}$$

Da bei diesen Exempeln die Dividenden um 2. 3. 4. und 5 Graden kleiner, als die Divisoren (s. §.53), so musten auch die Quotienten um so viel kleiner genommen werden, als die Divisoren sind, wobei die Reductionen nach §. 52 verrichtet wurden.

$$a^{2})\ a^{-1} \mid a^{-3} \qquad\qquad a^{3})\ a^{-2} \mid a^{-3}$$
$$a^{-1} - a^{-1} \qquad\qquad a^{-2} - a^{-2}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

Denn da die Dividenden um 3 und 5 Graden kleiner, als die Divisoren (s. §. 53), so musten auch die Quotienten um so viel kleiner sein, als die Divisoren sind.

$$a^{-4})\ a^{1} \mid a^{5} \qquad\qquad a^{-3})\ a^{2} \mid a^{5}$$
$$a^{1} - a^{1} \qquad\qquad a^{2} - a^{2}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

Da hier die Dividenden um 5 Graden grösser, als die Divisoren (s. §. 53), so musten auch die Quotienten um so viel grösser, als die Divisoren sein.

$$a^{-4})\ a^{-3} \mid a \qquad\qquad a^{-4})\ a^{-2} \mid a^{2}$$
$$a^{-3} - a^{3} \qquad\qquad a^{-2} - a^{-2}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

Hier waren die Dividenden um einen und zwei Graden grösser, als die Divisoren (s. §. 53), so musten auch die Quotienten um so viel grösser genommen werden.

4) Da der Divisor in Absicht auf einen Coefficienten und Exponenten genommen wird.

Z. E. $$3a)\ 6a^{3}bc^{2} \mid 2a^{2}bc^{2} \qquad\qquad 8c)\ 6a^{3}bc^{2} \mid \tfrac{3}{4}a^{3}bc$$
$$6a^{3}bc^{2} - 6a^{3}bc^{2} \qquad\qquad 6a^{3}bc^{2} - 6a^{3}bc^{2}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

$$8a^{2})\ 6a^{3}bc^{2} \mid \tfrac{3}{4}abc^{2} \qquad\qquad \tfrac{1}{3}b)\ a^{3}b \mid a^{3}3b$$
$$6a^{3}bc^{2} - 6a^{3}bc^{2} \qquad\qquad a^{3}b - a^{3}b$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

Nota I. Hierbei ist nach §. 80 Not. I. wohl zu merken, daß die Wörter: aus oder von bei dem Dividiren ja nicht gebraucht werden dörffen, weil solche eine Multiplication andeuten, sondern mit oder durch, als z. E. bei lezterer Division hiese es: durch oder mit $\frac{1}{3}b$, sol $a^{3}\,1b$ dividirt werden, komt $a^{3}3b$.

Nota II. Zur Uebung und Probe können alle vorhergehende und nachfolgende Exempeln umgewandt und mit dem Quotienten dividirt werden, da dann der Divisor wiederum erscheinen muß.

§. 99.

§. 99. Hat man eine complexe Grösse vor sich, deren Glieder einen oder etliche gleiche Buchstaben enthalten, so weiß man nach der Multiplication (§. 81), daß ein jedes Glied damit multiplicirt sei, mithin auch ein jedes Glied hinwiederum damit dividirt werden könne (§. 93).

§. 100. Dahero nimt man einen solchen gemeinschaftlichen Factoren zum Divisor und dividirt ein jedes Glied damit, wie §. 94 u. f. gezeiget worden, wobei es gleich gilt, ob der Divisor + oder − genommen wird, wann nur die §. 96. gegebenen Regeln beobachtet werden.

Z. E. Bei der Grösse: $ab - b^2$ enthält ein jedes Glied b, folglichen kan dieselbige auch mit sothanem Buchstaben dividirt werden.

$b)\ ab - b^2 \mid a - b$
$ab - b^2 - ab + b^2$
0

Oder: $-b)\ ab - b^2 \mid -a + b$
$ab - b^2 - ab + b^2$
0

§. 101. Man hat also bei dem Dividiren auf alle Regeln zu sehen, welche bei den vorhergehenden Rechnungsarten gegeben worden, und auf die viererlei Fälle, so dabei vorkommen können (§. 98).

Z. E. Da bei nächst vorstehender Division $-b$ zum Divisor genommen wurde, so muste bei dem Dividiren ab, als bei ungleichen Zeichen, zum Quotienten $-a$, und bei dem Dividiren $-b^2$, als bei gleichen Zeichen, zum Quotienten $+b$ genommen werden.

Bei der Multiplication des Divisors $-b$ und des Quotienten $-a+b$ war das Product: $ab - b$, welches unter contrairen Zeichen, als $-ab+b^2$ vom Dividenden subtrahirt wurde (§. 73).

Und da bei dem Reduciren (§. 60) die Glieder gegeneinander aufgingen und 0 wurden, so war der Dividend und Product einander gleich (§. 97).

Item $b)\ ab + b^2 \mid a + b$
$ab + b^2 - ab - b^2$
0

Oder: $-b)\ ab + b^2 \mid -a - b$
$ab + b^2 - ab - b^2$
0

$b)\ ab + 1b \mid a + 1$ Oder: $b)\ ab - b \mid a - 1$

$ab + b - ab - b$ $\quad$ $ab - b - ab + b$

0 $\quad$ 0

Man siehet also, wie nöthig es auch hier sei, entweder 1 als einen Coefficienten vorzusezen oder sich denselben einzubilden (§. 38).

Die Grösse: $-a^2b + ab^2$, oder, welches einerlei (§. 43): $ab^2 - a^2b$, kan zur Uebung dividirt werden

Mit	b,	komt zum Quotienten:	$-a^2 + ab$
⸗	$-b$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$a^2 - ab$
⸗	a	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$-ab + b^2$
⸗	$-a$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$ab - b^2$

Item, zur Uebung kan die Grösse: $-a^2c^3 + bc^3$, oder: $bc^3 - a^2c^3$ dividirt werden

Mit	c^3,	komt zum Quotienten:	$-a^2 + b$
⸗	$-c^3$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$a^2 - b$
⸗	c^2	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$-a^2c + bc$
⸗	$-c^2$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$a^2c - bc$
⸗	c	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$-a^2c^2 + bc^2$
⸗	$-c$	⸗ ⸗ ⸗ ⸗	$a^2c^2 - bc^2$

Item $c^3)\ bc^3 - a^2c^3 \mid b1 - a^2 1$ oder: $1b - 1a^2$

$bc^3 - a^2c^3 - bc^3 + a^2c^3$

0

$c^4)\ bc^3 - a^2c^3 \mid bc^{-1} - a^2c^{-1}$

$bc^3 - a^2c^3 - bc^3 + a^2c^3$

0

$4c)\ 4bc^3 - 3ac^3 \mid bc^2 - \frac{3}{4}ac^2$

$4bc^3 - 3ac^3 - 4c^3b + 3ac^3$

0

$3c^2)\ 4bc^3 - 3ac^3 \mid 1\frac{1}{3}bc - 1ac$

$4bc^3 - 3ac^3 - 4bc^3 + 3ac^3$

0

$3b)$

$$3b) \; 4bc^2 - 3b \mid 1\tfrac{1}{3}c^2 - 1$$
$$4bc^2 - 3b - 4bc^2 + 3b$$
$$0$$

$$3a) \; 3ba^2 - ba^2 \mid ba - \tfrac{1}{3}ba$$
$$3ba^2 - ba^2 - 3ba^2 + ba^2$$
$$0$$

$$2c^3) \; 2abc^3 - 6c^5 + ac^4de \mid ab - 3c^2 + \tfrac{1}{2}acde$$
$$2abc^3 - 2abc^3$$
$$-6c^5 + 6c^5$$
$$ac^4de - ac^4de$$
$$0$$

Hier wurde nach gemeiner Art ein jedes Glied des Dividenden besonders dividirt, der Quotient und Divisor miteinander multiplicirt, und das Product sogleich vom dividirten Glied subtrahirt.

Zur Uebung kan dieses Exempel noch auf vielerlei Weise dividirt werden, jedoch in Ansehung der Buchstaben nur mit c, weil solches der einzige gemeinschaftliche Factor ist, in Ansehung des Coefficienten und Exponenten aber, auf unzählige Art, weil bei Ersterm die Theile, und bei Lezterm die negative Exponenten, keine Schranken haben, wie aus dem Vorhergehenden zu erkennen ist (s. §. 98. 2. 3).

§. 102. Haben aber nicht alle Glieder einen oder etliche gleiche Buchstaben oder Factoren, so werden nur diejenige, welche diese Eigenschaft haben, wie vorhin, dividirt, und das Uebrige, wie bei dem gemeinen Dividiren, bruchsweise getheilet.

Z. E. $b) \; a - bc \mid -c + \frac{a}{b}$ Item $a) \; b + ab \mid b + \frac{b}{a}$

Item $a) \; c - 3ab \mid \frac{c}{a} - 3b$, oder, welches einerlei: $-3b + \frac{c}{a}$

Item $3b) \; 4bc^2 - 3b + de \mid 1\tfrac{1}{3}c^2 - 1 + \frac{de}{3b}$

Die Probe geschiehet, wie vorhin, da ein jedes Glied des Quotienten mit dem Divisoren multiplicirt und das Product

 vom

vom Dividenden subtrahirt wird, oder, wie hernach bei den Brüchen vorkommen wird, da die Glieder des Quotienten mit dem Nenner des Bruchs gegrössert und hernach vom Dividenden subtrahiret werden.

§. 103. Sol eine incomplexe oder complexe Grösse mit einem oder etlichen Buchstaben dividirt werden, so die Grösse nicht enthält, so muß das Dividiren schlechthin nur bruchsweise geschehen.

Z. E. $\frac{3ab}{2c}$ $\frac{a^2+bc}{d}$ $\frac{2a^3+ba-c}{3de}$

§. 104. Mit einer jeden gemeinen Zahl aber, sie mag beschaffen sein, wie sie wolle, kan eine jede incomplexe und complexe Grösse, sie mögen ebenfals beschaffen sein, wie sie wollen, würklich und ohne Bruch dividirt werden, wenn man sich nur, wo kein Coefficient befindlich, 1 davor einbildet (§. 38).

Z. E. $\frac{1}{2}) ab \mid 2ab$ Oder: $1\frac{1}{3}) ab \mid \frac{3}{4}ab$

Denn $1ab$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, giebt $2ab$, und $1\frac{1}{3}$ in $1ab$, bringt $\frac{3}{4}ab$

Item: $4) a+\frac{1}{2}bc-3d \mid \frac{1}{4}a+\frac{1}{8}bc-\frac{3}{4}d$

Oder: $\frac{3}{4}) a+\frac{1}{2}bc-3d \mid 1\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}bc-4d$

§. 105. Erfordert aber eine Vorgabe oder Auflösung nicht absolut sothane besondere Division, so geschiehet solche kürzer und leichter überhaupt bruchsweise (§. 103) also:

$$\frac{a+\frac{1}{2}bc-3d}{\frac{3}{4}}$$

Da dann der Dividend nach den angenommenen oder bestimten (§. 6) oder auch willkührlichen Wehrten der Buchstaben (§. 12) resolviret und der erhaltene Betrag dividirt werden kan.

Z. E. a sei $=3$, $b=4$, $c=6$, und $d=5$, so ist die Resolution:

$$\begin{array}{rcr} a & = & 3 \\ \frac{1}{2}bc & = & 12 \\ \hline & & 15 \\ -3d & = & -15 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

Also

Also findet hier zufälliger Weise keine Division statt: wie dann obiger Quotient: $1\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}bc-4d$ nach diesen Wehrten der Buchstaben ebenfals nichts sein muß.

Wird aber $a=4$, $b=5$, $c=6$ und $d=2$ genommen, so ist die Resolution:

$$\begin{array}{rl} a & = 4 \\ \frac{1}{2}bc & = \underline{15} \\ & \ 19 \\ -3d & = \underline{-6} \\ \frac{3}{4}) & \ 13 \mid 17\frac{1}{3} \end{array}$$

Der Quotient, welches auch der Wehrt vom Quotienten in Buchstaben sein muß.

$$\begin{array}{rl} \text{Denn } 1\frac{1}{3}a \text{ ist} & = 5\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}bc \quad , & = \underline{20} \\ & \ 25\frac{1}{3} \\ -4d \quad , & = \underline{-8} \\ & \ 17\frac{1}{3} \end{array}$$

Quotient, wie vorhin.

§. 106. Ist bei dem Fall, eine Division bruchsweise zu verrichten, der Divisor negativ, so wird solcher schlechthin zum Nenner genommen, und also die Grösse damit dividirt (§. 103).

Z. E. $-c)\,ad-b \mid \frac{ad-b}{-c}$

Nimt man $a=4$, $b=8$, $c=2$ und $d=6$, so ist die Resolution also:

$$\begin{array}{rl} ad \text{ d. i. } 4\times 6 & = 24 \\ -b \text{ d. i. } & = \underline{-\ 8} \\ -c = -\ 2) & 16 \mid -8 \text{ Quotient.} \end{array}$$

Oder, da ein jedes Glied des Dividenden mit $-c$ a part dividirt wird, und beide Quotienten addirt werden:

$$\begin{array}{rl} ad & = 24 \\ -c = & \underline{-2)} \\ & -12 \\ & \underline{+\ 4} \\ & -\ 8 \text{ Quotient.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -b & = -\ 8 \\ -c = & \underline{-2)} \\ & +4 \text{ Dieser Quotient} \\ & \text{zu } -12 \text{ addirt.} \end{array}$$

§. 107.

§. 107. Findet sich bei einer complexen Grösse kein gemeinschaftlicher Factor, d. i. haben nicht alle Glieder einen oder etliche Buchstaben miteinander gemein (§. 99) und die Anzahl der Glieder ist ein Product, d. i. derselben sind 4, 6, 8 u. s. f. so kan man schliessen, daß eine solche Grösse ein Product zweier complexen Factoren sei (§. 83), von welchen einer die Grösse dividirt werden könne.

§. 108. Nun komt es darauf an, ob eine solche Grösse auch würklich ein Product zweier complexen Grössen sei, und wie einer derselben beschaffen sein müsse, sothane Grösse damit dividiren zu können.

§. 109. Hierbei ist nöthig, die Grössen auf dreierlei Fälle einzutheilen (§. 98), als in solche, die keine Coefficienten und Exponenten haben: da Exponenten vorkommen, und wo sich Coefficienten befinden.

§. 110. Da nun ein jedes Product von zwei complexen Factoren aus 4, 6, 8, 9 und noch mehr Gliedern, deren Anzahl ein Product zweier Factoren ist, bestehen kan (§. 107), so wird das Dividiren desto begreiflicher, wann die Exempeln einer jeden Art (§. 109) nach der Anzahl der Glieder vorgenommen werden.

§. 111. Solchemnach folget:

1) Wie eine Grösse dividiret werde, welche keine Coefficienten und Exponenten hat, und zwar:

a) Da dieselbige aus 4 Gliedern bestehet (§. 107).

Z. E. Die Grösse $ac - cb + ad - bd$ in diejenige zween Factoren zu theilen, woraus dieselbige entstanden, oder, welches einerlei, sie zu dividiren.

§. 112. Bei dieser Grösse siehet man zwar leicht ein, wie solche durch die Multiplication (§. 83) entstanden sei, und daß daher dieselbige durch $c + d$ oder auch durch $a - b$ dividiret werden könne; alleine, weil die Glieder gar unterschieden

schieden vorkommen, und die Aufsuchung eines Divisoren denen Anfängern insgemein schwer fället, so ist nöthig, desfals gewisse Regeln zu geben, wodurch sie sich helfen können.

§. 113. Wenn also eine Grösse von gegenwärtiger Art zu dividiren vorkomt, so sezet man erstlich die Glieder mit ihren Zeichen untereinander, und ordnet hierauf dieselbige also, daß zwei und zwei Glieder gleiche Buchstaben oder Factoren erhalten, wobei man sich erinnern muß, was wegen der Stellen der Factoren und Glieder §. 22. 43 gesaget worden, da dann deutlich in die Augen fallen wird, wie der Divisor beschaffen sein müsse, wenn die Grösse damit getheilet werden sol.

Z. E. Es sei die vorstehende Grösse: $ac - cb + ad - bd$ zu dividiren, so werden die Glieder also untereinander gesezet und geordnet:

ac		ac		ca
$-cb$	Das Ordnen:	ad	oder	$-cb$
ad		$-bc$		da
$-bd$		$-bd$		$-db$

Bei diesen geordneten Gliedern siehet man, 1) daß a mit c und d, 2) b mit $-c$ und $-d$, 3) c mit a und $-b$, und 4) d mit a und $-b$ multiplicirt sei, mithin sich auch die Grösse mit c und d u. s. f. dividiren lassen müsse.

§. 114. Ist auf solche Weise ein Divisor gefunden, so wird alsdann mit dem ersten Glied desselben, wie §. 100 u. f. gezeiget worden, das erste Glied des Dividenden dividirt und weggethan, alsdann nach Art der gemeinen Division das zweite Glied mit dem erhaltenen Quotienten multiplicirt, und das Product von einem gleichen Glied in dem Dividenden, es mag solches stehen, wo es wil, subtrahirt und ebenfals weggethan, so ist der erste Theil des Dividenden getheilt, worauf der andere Theil auf eben diese Weise behandelt wird.

Z. E. Es sei der Divisor: $c+d$

$$
\begin{array}{l}
c+d)\ ac-cb+ad-bd\ |\ a-b \\
\quad -ac \quad -ad \\
\hline
\quad -cb-bd \\
\quad +cb+bd \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

Zur Uebung können die Glieder des Dividenden, jedoch mit Beibehaltung ihrer Zeichen, verändert, mit dem Quotienten dividirt, und die Glieder des Divisoren in Ansehung der Zeichen und Stellen genommen werden, wie man nur wil.

Item die Grösse: $ac+3c+ab+3b$ zu dividiren, oder ihre beide Factoren aufzusuchen (§. 107 u. f.).

Nota I. Man hat aber nicht nöthig, bei dem Ordnen der Glieder alle Divisoren aufzusuchen, sondern wann man nur einen hat, so ist es genug, die übrigen ergeben sich hernach von selbsten.

$$
\begin{array}{c}
ac \\
3c \\
ab \\
3b
\end{array}
$$

Hier stehen schon die Glieder in Ansehung gleicher Factoren untereinander, und zeigen an, daß der Divisor a und 3 sein könne.

$$
\begin{array}{l}
a+3)\ ac+3c+ab+3b\ |\ c+b \\
\quad -ac-3c \\
\hline
\quad ab+3b \\
\quad -ab-3b \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

Item die Grösse: $ab+4b+a+4$ zu dividiren.

$$
\begin{array}{cc}
ab & ab \\
4b & a1 \\
a & 4b \\
4 & 4.1
\end{array}
$$

Damit a als ein multiplicirtes Glied vorgestellet würde, muste ihm eine 1 beigefüget werden (§. 38), und dem 4 ebenfals in dieser Absicht eine 1, jedoch mit einem Punct unterschieden (s. §. 25.

(s. §. 25. 84. 98), worauf man siehet, daß der Divisor $b + 1$ sein könne.

$$
\begin{array}{l}
b+1)\ ab+4b+a+4 \mid a+4 \\
\quad -ab \qquad -a \\
\hline
\qquad 4b+4 \\
\qquad -4b-4 \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

Item die Grösse: $ab + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{16}$ zu theilen.

$$
\begin{array}{ll}
ab & ab \\
\frac{1}{4}a & a\frac{1}{4} \\
\frac{1}{4}b & \frac{1}{4}b \\
\frac{1}{16} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}
\end{array}
$$

Weil a mit b und $\frac{1}{4}$, ingleichen $\frac{1}{4}$ mit b und $\frac{1}{4}$ multiplicirt ist, so muß der Divisor $b + \frac{1}{4}$ sein.

$$
\begin{array}{l}
b+\frac{1}{4})\ ab+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{16} \mid a+\frac{1}{4} \\
\quad -ab-\frac{1}{4}a \\
\hline
\qquad \frac{1}{4}b+\frac{1}{16} \\
\qquad -\frac{1}{4}b-\frac{1}{16} \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

Item die Grösse: $\frac{1}{2}a - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}a - \frac{1}{12}$ zu dividiren.

$\frac{1}{2}a$ — $a\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{6}$ — $a\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}a$ — $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ Denn $\frac{1}{3}$ mahl $\frac{1}{2}$ giebt $\frac{1}{6}$, gleich wie $\frac{1}{6}$ durch $\frac{1}{3}$ dividirt $\frac{1}{2}$ macht.

$-\frac{1}{12}$ — $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ Denn $\frac{1}{3}$ mahl $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{12}$, gleich wie $\frac{1}{12}$ durch $\frac{1}{3}$ dividirt $\frac{1}{4}$ giebt.

Also ist der Divisor: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ oder: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}a-\frac{1}{12} \mid a-\frac{1}{3} \\
\quad -\frac{1}{2}a \qquad -\frac{1}{4}a \\
\hline
\qquad -\frac{1}{6}-\frac{1}{12} \\
\qquad +\frac{1}{6}+\frac{1}{12} \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

Item

Item die Grösse: $abef - cdef + abe - cde$ zu theilen.

$$\begin{array}{r} abef \\ -cdef \\ abe \\ -cde \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ab & ef \\ ab & e \\ -cd & ef \\ -cd & e \end{array}$$

Hier ist der Divisor entweder: $ef + e$ oder: $-ef - e$

$$\begin{array}{l} -ef-e)\ abef - cdef + abe - cde \mid -ab + cd \\ \qquad\quad -abef \qquad\quad -abe \\ \hline \qquad\qquad -cdef - cde \\ \qquad\qquad +cdef + cde \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nota II. Man hat auch nicht nöthig, bei dem Ordnen der Glieder alle Glieder zu nehmen: sondern man darf nur erstlich das Glied von den mehresten Buchstaben, darzu auch eine Potenz gehöret (§.28), nehmen, alsdann eines, so diesem am gemässesten, nemlich von den mehresten gleichen Buchstaben ist, darunter sezen, und die gleiche Buchstaben, wie vorhin, abschneiden.

b) Da eine Grösse aus 6 Gliedern bestehet (§. 107).

Z. E. Die Grösse: $abde - dec + de - abf + cf - f$ zu dividiren.

$$\begin{array}{r|l} ab & de \\ -ab & f \end{array}$$

Also ist der Divisor: $de - f$ und die Division also:

$$\begin{array}{l} de-f)\ abde - dec + de - abf + cf - f \mid ab - c + 1 \\ \qquad\quad -abde \qquad\qquad\quad +abf \\ \hline \qquad\qquad -dec + de + cf - f \\ \qquad\qquad +dec \qquad\ -cf \\ \hline \qquad\qquad\qquad de - f \\ \qquad\qquad\quad -de + f \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Item die Grösse: $aef + efbc - efd - a - bc + d$ zu theilen.

$$\begin{array}{r|l} ef & bc \\ -1 & bc \end{array}$$

Der Divisor ist also: $ef - 1$

$$\begin{array}{l} ef - 1)\ aef + efbc - efd - a - bc + d \mid a + bc - d \\ \quad -aef \qquad\qquad\qquad\quad + a \\ \hline \qquad efbc - efd - bc + d \\ \qquad -efbc \qquad\ + bc \\ \hline \qquad\quad -efd + d \\ \qquad\quad +efd - d \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Item die Grösse: $acd - \frac{1}{4}cd + bcd - \frac{1}{3}ae + \frac{1}{12}e - \frac{1}{3}be$ zu dividiren.

$$\begin{array}{r|l} a & cd \\ -\frac{1}{3}a & e \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{r|l} b & cd \\ -\frac{1}{3}b & e \end{array}$$

Da sich bei dieser Grösse zwei Glieder von gleicher Anzahl, nemlich von 3 Buchstaben oder Factoren, befinden, so konte mit einem jeden der Versuch angestellet werden, wobei allemahl der Divisor: $cd - \frac{1}{3}e$ gefunden wurde.

$$\begin{array}{l} cd - \frac{1}{3}e)\ acd - \frac{1}{4}cd + bcd - \frac{1}{3}ae + \frac{1}{12}e - \frac{1}{3}be \mid a - \frac{1}{4} + b \\ \quad -acd \qquad\qquad\qquad + \frac{1}{3}ae \\ \hline \qquad -\frac{1}{4}cd + bcd + \frac{1}{12}e - \frac{1}{3}be \\ \qquad +\frac{1}{4}cd \qquad\quad - \frac{1}{12}e \\ \hline \qquad\quad bcd - \frac{1}{3}be \\ \qquad\quad -bcd + \frac{1}{3}be \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Item die Grösse: $\frac{1}{6}b + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}a + \frac{3}{16}$ zu theilen.

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{3}a & b \\ -\frac{1}{4}a & 1 \end{array}$$

Hier ist der Divisor: $\frac{1}{3}b$ und $\frac{1}{4}$ von 1, d. i. $\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3}b - \frac{1}{4})\ \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}a + \frac{3}{16} \mid \frac{1}{2} + a - \frac{3}{4} \\ \quad -\frac{1}{6}b \qquad\qquad\qquad + \frac{1}{8} \\ \hline \qquad \frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}a + \frac{3}{16} \\ \qquad -\frac{1}{3}ab \qquad\quad + \frac{1}{4}a \\ \hline \qquad\quad -\frac{1}{4}b + \frac{3}{16} \\ \qquad\quad +\frac{1}{4}b - \frac{3}{16} \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Item die Grösse: $\frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{20} + \frac{1}{15} - \frac{1}{5}b$ zu dividiren.

$$\frac{1}{2}b$$
$$-\frac{1}{5}b$$

Weil b mit $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{5}$ multiplicirt ist, so muß die Grösse auch damit dividirt werden können.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\,)\ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{20} + \frac{1}{15} - \frac{1}{5}b \ \Big|\ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + b$$
$$-\frac{1}{8} \qquad\qquad + \frac{1}{20}$$
$$\overline{\qquad - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{15} - \frac{1}{5}b}$$
$$+\frac{1}{6} \qquad\qquad - \frac{1}{15}$$
$$\overline{\qquad \frac{1}{2}b - \frac{1}{5}b}$$
$$-\frac{1}{2}b + \frac{1}{5}b$$
$$\overline{\qquad 0 \qquad}$$

Nota III. Wann die Glieder des Divisoren, wie hier, lediglich aus gemeinen Zahlen bestehen, und die Glieder des Dividenden sich nicht in der Ordnung befinden, wie sie multiplicando entstehen (§. 83), folglichen man nicht weiß, welches Glied zuerst dividirt werden sol, so muß man es mit einem oder dem andern Glied probiren, d. i. solches gewöhnlich dividiren, und hernach zusehen, ob das erhaltene Product des Quotienten und zweiten Glieds des Divisoren einem Glied gleich sei, und also subtrahirt werden könne.

Z. E. Man hätte oben $\frac{1}{20}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, so wäre zum Quotienten $\frac{1}{10}$ gekommen, diese mit $\frac{1}{5}$ multiplicirt, bringt zum Product $\frac{1}{50}$, welches aber keinem Glied gleich ist.

Nota IV. Wird aber ein Dividend gegeben, der gar keinen Buchstaben enthält, so gehöret solcher nicht in die Algebra, und ist dahero zu verwerffen.

Nota V. Nach dieser Anweisung ist es nun leicht, bei allen dergleichen Grössen einen Divisoren zu finden, und zwar werden bei Grössen von 8 und 10 Gliedern allezeit Divisoren von 2, bei Grössen von 9 und 12 Gliedern aber Divisoren von 3 Gliedern erhalten, wobei man ohnehin weiß, daß eine jede Division umgewendet und der Quotient zum Divisor genommen werden könne (§. 98 Not. II.).

Z. E. Bei lezterm Exempel ist der Quotient: $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + b$ mit welchem also dividirt wird:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + b)\ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{20} + \frac{1}{15} - \frac{1}{5}b \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \\ \quad - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}b \\ \hline \quad\quad - \frac{1}{20} + \frac{1}{15} - \frac{1}{5}b \\ \quad\quad + \frac{1}{20} - \frac{1}{15} + \frac{1}{5}b \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

2) Wie eine Grösse dividirt wird, welche Exponenten hat, und deren Gliedern keine Coefficienten vorstehen.

a) Da dieselbige aus vier Gliedern bestehet.

Nota VI. Gleichwie in dem Vorhergehenden zum Versuch allezeit das gröste Glied zuerst genommen worden (§. 114 N. II.), also wird hier die gröste Potenz, und zwar in einzelnen Buchstaben (§. 28), zuerst, und alsdann das folgende Glied, so ihr am nächsten komt, zum Versuch genommen, und damit wie vorhin verfahren.

Z. E. Die Grösse: $a^2 + ab - ac - bc$ zu theilen.

$$\begin{array}{c|c} a & a \\ a & b \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{c|c} a & a \\ -a & c \end{array}$$

Also ist der Divisor: $a + b$ oder: $a - c$

$$\begin{array}{l} a + b)\ a^2 + ab - ac - bc \mid a - c \\ \quad - a^2 - ab \\ \hline \quad\quad - ac - bc \\ \quad\quad + ac + bc \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Zur Uebung können folgende Grössen dividirt werden:

$ab - db + a^2 - ad$	mit $a + b$,	komt: $a - d$
$b - ba + a - a^2$	" $- a + 1$	" $b + a$
$a^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{8}$	" $a + \frac{1}{2}$	" $a + \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{3}a + a^2 - \frac{1}{3}a + a^2$	" $a + a$	" $-\frac{1}{3} + a$

b) Da eine Grösse aus sechs Gliedern bestehet.

Z.E. $a^3b - a^2c^2 - a^2d + abc - c^3 - cd$ zu dividiren.

$$\begin{array}{r|l} aa & ab \\ c & ab \end{array}$$

Also ist der Divisor: $a^2 + c$

$$\begin{array}{l} a^2 + c)\ a^3b - a^2c^2 - a^2d + abc - c^3 - cd \mid ab - c^2 - d \\ \quad - a^3b \qquad\qquad\qquad\qquad - abc \\ \hline \quad - a^2c^2 - a^2d - c^3 - cd \\ \quad + a^2c^2 \qquad\quad + c^3 \\ \hline \qquad - a^2d - cd \\ \qquad + a^2d + cd \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

It. die Grösse: $a^4d + \frac{1}{4}ba^2d + a^2b^2d - \frac{1}{3}a^2e^2 + \frac{1}{12}be^2 - \frac{1}{3}e^2b^2$

$$\begin{array}{r|l} aa & aad \\ -\frac{1}{3}aa & ee \end{array}$$

Also ist der Divisor: $a^2d - \frac{1}{3}e^2$

$$\begin{array}{l} a^2d - \frac{1}{3}e^2)\ a^4d - \frac{1}{4}ba^2d + a^2b^2d - \frac{1}{3}a^2e^2 + \frac{1}{12}be^2 - \frac{1}{3}e^2b^2 \mid a^2 - \frac{1}{4}b + b^2 \\ \quad - a^4d \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{3}a^2e^2 \\ \hline \quad - \frac{1}{4}ba^2d + a^2b^2d + \frac{1}{12}be^2 - \frac{1}{3}e^2b^2 \\ \quad + \frac{1}{4}ba^2d \qquad\qquad - \frac{1}{12}be^2 \\ \hline \qquad a^2b^2d - \frac{1}{3}e^2b^2 \\ \qquad - a^2b^2d + \frac{1}{3}e^2b^2 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Nota VII. Hieher gehöret, was Nota III. IV. und V. gesaget worden, zu welchem Ende vorstehende Division zur Uebung umgewendet werden kan.

3) Wie eine Grösse dividirt wird, deren Glieder auch Coefficienten haben.

a) Da dieselbige aus vier Gliedern bestehet.

Nota VIII. Es befinden sich zwar bei den vorhergehenden Exempeln auch Coefficienten, es sind aber entweder gebrochene Zahlen, welche nur Theile der Glieder anzeigen, oder es sind zuweilen ganze Zahlen, welche zufälliger Weise das Mehrfache eines Gliedes anzeigen müssen; hier aber kommen bei allen Gliedern Coefficien-

efficienten vor, welche auf eine gewisse Art und Verhältnis miteinander in Verbindung stehen, mithin der Divisor in Absicht auf sie alle genommen wird.

Nota IX. Wie in dem Vorhergehenden in Ansehung der Buchstaben ein Divisor gefunden worden, also geschiehet es auch hier, ohne auf die Coefficienten zu sehen.

Z. E. $8a^3 + 12abc - 10a^2bc - 15b^2c^2$ zu theilen.

$$\begin{array}{r|l} aa & a8 \\ -aa & bc10 \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{r|l} 8aa & a \\ -10aa & bc \end{array}$$

Also ist der Divisor $8a - 10bc$, und die Division also:

$$\begin{array}{l} 8a - 10bc)\ 8a^3 + 12abc - 10a^2bc - 15b^2c^2 \mid a^2 + 1\tfrac{1}{2}bc \\ \quad -8a^3 \qquad\qquad + 10a^2bc \\ \hline \qquad 12abc - 15b^2c^2 \\ \quad -12abc + 15b^2c^2 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nota X. Gleichwie bei incomplexen Grössen die Coefficienten keine Schranken haben (s. §. 98. 2 und §. 101 zur Uebung), also können solche auch hier bei den Divisoren durch gleiches Kleinern oder Grössern ohnzähligmal verändert werden, wobei allemahl, jedoch, wie es sich von selbsten verstehet, bei veränderten Quotienten, eine Division statt findet.

Z. E. Wann obige Coefficienten 8 und 10 mit 2 gekleinert oder dividiret werden, so erhält man für dieselbige 4 und 5, und die Division ist also:

$$\begin{array}{l} 4a - 5bc)\ 8a^3 + 12abc - 10a^2bc - 15b^2c^2 \mid 2a^2 + 3bc \\ \quad -8a^3 \qquad\qquad + 10a^2bc \\ \hline \qquad 12abc - 15b^2c^2 \\ \quad -12abc + 15b^2c^2 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Oder: Es werden sothane Coefficienten durch 2 gegrössert, so kommen 16 und 20, folglichen ist die Division:

$$\begin{array}{l} 16a - 20bc)\ 8a^3 + 12abc - 10a^2bc - 15b^2c^2 \mid \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{3}{4}bc \\ \quad -8a^3 \qquad\qquad + 10a^2bc \\ \hline \qquad 12abc - 15b^2c^2 \\ \quad -12abc + 15b^2c^2 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Item die Grösse: $6a^2b^2c + 8b^3c^2 - 18a^2bc - 24b^2c^2$ zu dividiren.

$$\begin{array}{r|l} 6aab & bc \\ -18aab & c \end{array}$$

Also ist der Divisor, wann für 6 der Coefficient 3 und für 18 der Coefficient 9 genommen, d. i. mit 2 gekleinert wird: $3bc - 9c$

$$3bc - 9c)\ 6a^2b^2c + 8b^3c^2 - 18a^2bc - 24b^2c^2 \mid 2a^2b + 2\tfrac{2}{3}b^2c$$
$$-6a^2b^2c \qquad\qquad + 18a^2bc$$
$$8b^3c^2 - 24b^2c^2$$
$$-8b^3c^2 + 24b^2c^2$$

Hier brachte der Coefficient 3 in den Quotienten $2\frac{2}{3}$, welcher Bruch wäre vermieden worden, wann 6 und 18 durch 3 gekleinert worden, da man dann 2 und 6 erhalten hätte.

Item die Grösse: $1\frac{1}{2}b^2c + b^3c^2 - bcde - \frac{2}{3}b^2c^2de$ zu theilen.

$$\begin{array}{r|l} -\tfrac{2}{3}bbcc & de \\ bbcc & b \end{array}$$

Also ist der Divisor: $-\frac{2}{3}de - b$

Wird dieser Divisor durch 2 gekleinert, so wird er $-\frac{1}{3}de - \frac{1}{2}b$, im Grösserungsfall mit 3 aber: $2de + 3b$; denn man bildet sich hier vor b den Coefficienten 1 ein (§. 38).

$$2de + 3b)\ 1\tfrac{1}{2}b^2c + b^3c^2 - bcde - \tfrac{2}{3}b^2c^2de \mid -\tfrac{1}{3}b^2c^2 + \tfrac{1}{2}bc$$
$$-b^3c^2 \qquad\qquad + \tfrac{2}{3}b^2c^2de$$
$$1\tfrac{1}{2}b^2c - bcde$$
$$-1\tfrac{1}{2}b^2c + bcde$$
$$0$$

b) Da eine Grösse aus sechs Gliedern bestehet.

Z. E. Es sei dieselbige: $8a^2d^2 + 12d^2b - 4d^3c + 4a^3b + 6ab^2 - 2abcd$

$$\begin{array}{r|l} 4aa & ab \\ 8aa & dd \end{array}$$

Also ist der Divisor: $4ab + 8d^2$

Wird solcher mit 2 gekleinert, so ist er: $2ab + 4d^2$

$$2ab + 4d^2)\ 8a^2d^2 + 12d^2b - 4d^3c + 4a^3b + 6ab^2 - 2abcd \mid 2a^2 + 3b - cd$$
$$-8a^2d^2 \qquad\qquad -4a^3b$$
$$12d^2b - 4d^3c + 6ab^2 - 2abcd$$
$$-12d^2b \qquad -6ab^2$$
$$-4d^3c - 2abcd$$
$$+4d^3c + 2abcd$$
$$0$$

§. 115.

§. 115. Bestehet eine Grösse aus 2, 3, 5 Gliedern u. s. f. und also nicht aus der Anzahl, woraus man schliessen könte, daß sie ein Product zweier complexen Factoren sei (§. 107 u. f.), so kan sie es dennoch würklich sein, wann vermög der Multiplication, als ihrem Grunde, die Zwischenproducten reducirt sind.

Es folget also:

a) **Wie eine Grösse von zwei Gliedern ohne Coefficienten ein Product zweier complexen Factoren sein könne.**

Z. E.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline - ab - b^2 \\ a^2 + ab \end{array}$$

Da die beiden Zwischenproducten ab gegeneinander aufgehen (§. 60), so ist die Grösse:

$$a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{ccc} a & & a \\ & \times & \\ -b & & b \end{array}.$$

Also ist der Divisor entweder: $a - b$ oder: $a + b$

$$a - b)\ a^2 - b^2 \mid a + b \qquad a + b)\ a^2 - b^2 \mid a - b$$

$$\begin{array}{r} -a^2 + ab \\ \hline + ab - b^2 \\ - ab + b^2 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -a^2 - ab \\ \hline - ab - b^2 \\ + ab + b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Wenn sich also zu dem Product des Divisoren und Quotienten, wie hier zu $-ab$, im Dividenden kein ähnliches Glied befindet, so wird doch die Subtraction unter verkehrtem Zeichen gewöhnlich verrichtet, und der Rest, wie hier $-ab - b^2$, ferner dividirt.

Item die Grösse: $a^3 - b^3$ zu dividiren.

$$\begin{array}{r|l} aa & a \\ -bb & b \end{array}$$

Also ist der Divisor: $a - b$, oder: $a + b$, wenn b^3 positiv genommen wird.

$$\begin{array}{l} a-b)\ a^3-b^3 \mid a^2+ab+b^2 \\ \quad -a^3+a^2b \\ \hline \qquad a^2b-b^3 \\ \qquad -a^2b+ab^2 \\ \hline \qquad\qquad ab^2-b^3 \\ \qquad\qquad -ab^2+b^3 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{l} a+b)\ a^3+b^3 \mid a^2-ab+b^2 \\ \quad -a^3-a^2b \\ \hline \qquad -a^2b+b^3 \\ \qquad +a^2b+ab^2 \\ \hline \qquad\qquad ab^2+b^3 \\ \qquad\qquad -ab^2-b^3 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

b) **Wie eine Grösse von zwei Gliedern mit Coefficienten ein Product zweier complexen Factoren sein könne.**

Z. E. Die Grösse: $18a^2 - 8b^2$ zu dividiren.

$$\begin{array}{ll|l} 3. & 18a & a6 \\ 2. & -8b & b4 \end{array}$$

Also kan der Divisor unter andern sein: $6a - 4b$, oder: $3a - 2b$

$$\begin{array}{l} 6a-4b)\ 18a^2-8b^2 \mid 3a+2b \\ \quad -18a^2+12ab \\ \hline \qquad 12ab-8b^2 \\ \qquad -12ab+8b^2 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Item die Grösse: $8a^3 - b^3$ zu theilen.

$$\begin{array}{ll|l} 4. & 8aa & a2 \\ & -bb & b \end{array}$$

Also kan die Theilung durch $2a - b$ geschehen.

$$\begin{array}{l} 2a-b)\ 8a^3-b^3 \mid 4a^2+2ab+b^2 \\ \quad -8a^3+4a^2b \\ \hline \qquad 4a^2b-b^3 \\ \qquad -4a^2b+2ab^2 \\ \hline \qquad\qquad 2ab^2-b^3 \\ \qquad\qquad -2ab^2+b^3 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Item

Item die Grösse: $a^4 - 4b^4$ zu dividiren.

$$\begin{array}{r|l} aa & aa \\ 4bb & bb2 \end{array}$$

Also ist der Divisor: $a^2 + 2b^2$

$$\begin{array}{l} a^2 + 2b^2)\ a^4 + 4b^4 \mid a^2 - 2b^2 \\ \qquad\quad - a^4 - 2a^2b^2 \\ \hline \qquad\qquad - 2a^2b^2 + 4b^4 \\ \qquad\qquad + 2a^2b^2 + 4b^4 \end{array}$$ Solte negativ sein.

Es sei der Quotient der Divisor:

$$\begin{array}{l} a^2 - 2b^2)\ a^4 + 4b^4 \mid a^2 + 2b^2 \\ \qquad\quad - a^4 + 2a^2b^2 + 4b^4 \\ \hline \qquad\qquad + 2a^2b^2 + 4b^4 \\ \qquad\qquad - 2a^2b^2 + 4b^4 \end{array}$$ Solte negativ sein.

Nun nehme man an, die Grösse sei, wie sie das Ansehen hat, ein Biquadrat, davon die Wurzel ein Quadrat ist (§. 227), und nehme zu dem Ende die vorhin gefundene Factoren auch für Quadraten an, und multiplicire solche mit sich selbst, so erhält man in Ansehung dieser Factoren und nach ihrem Verhältnis ein Biquadrat:

$$\begin{array}{l} \qquad a^2 + 2b^2 \\ \qquad a^2 - 2b^2 \\ \hline \quad - 2a^2b^2 - 4b^2 \\ a^4 + 2a^2b^2 \\ \hline a^4 \qquad\qquad - 4b^2 \end{array}$$ Wäre das Biquadrat.

$$\begin{array}{l} a^2 \qquad\qquad - 2b^2 \\ a^2 \qquad\qquad - 2b^2 \\ \hline \quad - 2a^2b^2 + 4b^4 \\ a^4 - 2a^2b^2 \\ \hline a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4 \\ \hline a^2 - 2ab + 2b^2 \end{array}$$

Die Wurzel, als ein Quadrat, welches nun mit sich selbst multiplicirt wird.

Das nähere Biquadrat, davon die Wurzeln und die Helfte des Zwischenproducts ein Quadrat sein sol, welche nun ohnfehlbar der Divisor oder ein Factor der zu theilenden Grösse ist.

$$a^2 - 2ab + 2b^2)\ a^4 + 4b^4 \mid a^2 + 2ab + 2b^2$$
$$- a^4 + 2a^3b - 2a^2b^2 + 4b^4$$
$$\overline{\qquad 2a^3b - 2a^2b^2 + 4b^4}$$
$$- 2a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3$$
$$\overline{\qquad + 2a^2b^2 - 4ab^3 + 4b^4}$$
$$- 2a^2b^2 + 4ab^3 - 4b^4$$
$$\overline{\qquad 0 \qquad}$$

c) Wie eine Grösse von drei Gliedern ein Product zweier complexen Factoren sein könne.

Z. E. $a^2 + 3ab + 2b^2$ zu theilen.

$$\begin{array}{c|c} a & a \\ b & b \end{array}$$

Also ist der Divisor: $a + b$

$$a + b)\ a^2 + 3ab + 2b^2 \mid a + 2b$$
$$- a^2 - ab$$
$$\overline{\qquad 2ab + 2b^2}$$
$$- 2ab - 2b^2$$
$$\overline{\qquad 0 \qquad}$$

Item die Grösse: $a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4$ in zween Factoren zu theilen.

$$\begin{array}{c|ccc} aa & a & \times & a \\ 4aa & b & & b2 \\ 16bb & b & & b4 \end{array}$$

Nach diesem Versuch ist nach Lit. a das erste Glied des Divisoren: a^2, das zweite Glied nach Lit. b: $2ab$, und das dritte Glied: $4b^2$, dabei das Zwischenproduct: $2ab$ negativ sein muß.

$$a^2 - 2ab + 4b^2)\ a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4 \mid a^2 + 2ab + 4b^4$$
$$- a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2$$
$$\overline{\qquad 2a^3b + 16b^4}$$
$$- 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3$$
$$\overline{\qquad 4a^2b^2 + 16b^4 - 8ab^3}$$
$$- 4a^2b^2 - 16b^4 + 8ab^3$$
$$\overline{\qquad 0 \qquad}$$

d) Wie

d) Wie eine Grösse von fünf Gliedern ein Product zweier complexen Factoren sein könne.

Z. E. Dieselbige sei: $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$$\begin{array}{r|ll} aa & a & a \\ 4aa & b & b^2 \\ bb & b & b \end{array}$$

Nach diesem Versuch ist das erste Glied des Divisoren: a^2, das Zweite: $2ab$, und zwar negativ, und das Dritte: b^2

$$\begin{array}{rl} a^2 - 2ab + b^2) & a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \mid a^2 - 2ab + b^2 \\ & -a^4 + 2a^3b - a^2b^2 \\ \hline & -2a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ & +2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ \hline & a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\ & -a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \end{array}$$

Nota. Zuweilen finden sich bei einer Grösse die §. 107 angezeigte Eigenschaften eines Products zweier Factoren, welche es aber dennoch nicht ist, wie sich solches bei dem Versuch sogleich offenbaret.

Z. E. Es sei die Grösse: $1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5$ zu theilen.

Nach der Anzahl der Glieder müsten die beiden Factoren 2 und 3 Glieder sein, welches aber wegen der reducirten Glieder nicht sein kan.

Wegen des anzustellenden Versuchs aber hat man folgendes voraus zu sezen:

Wann diese Grösse ein Product zweier complexen Factoren ist, so muß ein jedes Glied derselben, und also auch das Glied 1, ein Product sein, woraus folget, daß ein jeder Factor das Glied 1 enthalten müsse, aus welchen beiden das Product oder das Glied 1 in der Grösse entstanden (s. §. 38. 94).

Man hat also bei dem Versuch zu den Factoren der Glieder, zur Deutlichkeit, den Factoren 1 zu sezen und alsdann gewöhnlich abzuschneiden.

$$\begin{array}{r|l} -aaa & aa1 \\ 5aaa & a1 \\ -10aaa & 1 \\ \hline +10aa1 & \\ -5a1 & \end{array}$$

Hieraus ist nun sowohl auf- als absteigend klar, daß das erste Glied des Divisors 1 sei.

Werden

Werden alsdann die Coefficienten: $-5+10$ reducirt, d. i. dividirt, so erhält man zum zweiten Glied des Divisors: $-2a$. Endlich ist a^2 das dritte Glied des Divisoren.

$$
\begin{array}{l}
1-2a+a^2)\ 1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5 \mid 1-3a+3a^2-a^3 \\
\quad -1+2a-a^2 \\
\hline
\quad -3a+9a^2-10a^3+5a^4-a^5 \\
\quad +3a-6a^2+3a^3 \\
\hline
\quad 3a^2-7a^3+5a^4-a^5 \\
\quad -3a^2+6a^3-3a^4 \\
\hline
\quad -a^3+2a^4-a^5 \\
\quad +a^3-2a^4+a^5 \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

§. 116. Kan eine Grösse nach angestelltem Versuch nur zum Theil dividirt werden, so wird das Uebrige bruchsweise getheilet (§. 102).

Z. E. Es sei die Grösse: $24a^2+6ab-8a^2-2ba+4c$

$$
\begin{array}{r|l}
24a & a4 \\
6a & b1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
4a+b)\ 24a^2+6ab-8a^2-2ba+4c \mid 6a-2a\ \frac{4c}{4a+b} \\
\quad -24a^2-6ab \\
\hline
\quad -8a^2-2ba+4c \\
\quad +8a^2+2ba \\
\hline
\quad 4c
\end{array}
$$

§. 117. Da nun nach der bisherigen Anweisung deutlich gezeiget worden, wie eine jede Grösse willkührlich getheilet werden könne, so befindet man sich nun im Stande, um so mehr mit einem gegebenen oder nach Masgab einer Vorgabe und Solution erforderlichen Divisoren eine Theilung zu verrichten.

§. 118. Kan man aber gar nicht einsehen, wie mit einem gegebenen oder erforderlichen Divisoren die Division verrichtet werden könne, so geschiehet solches, wie §. 103, nur bruchsweise, indeme nichts dabei verloh=

verlohren wird, weil man bei der Resolution in gemeine Zahlen einerlei Quotienten erhält.

Z. E. vorstehende Grösse wird bruchsweise dividirt:

$$\frac{24a^2 + 6ab - 8a^2 - 2ba + 4c}{4a + b}$$

§. 119. Bei der Algebra wird zuweilen eine Division complexer mit complexen Grössen nur angedeutet, also:

$$(ab + b^2 - c) : (a + 2b)$$

welches anzeiget, daß die erste Grösse durch die Zweite dividirt werden sol.

Ueberhaupt aber ist dieses in algebraischen Schriften das Divisionszeichen; man hat sich aber hier allezeit dafür der Bruchsformel bedienet.

Z. E. $a:b$ also: $\frac{a}{b}$ oder: $(ab + b^2 - c) : (a + 2b)$ also: $\frac{ab + b^2 - c}{a + 2b}$

§. 120. Weil, wie bekant, das Dividiren der Rükweeg vom Multipliciren ist, so bedarf es hier keiner Erklärung, warum gleiche Zeichen des Divisors und Dividenden, zum Quotienten +, und ungleiche Zeichen — bringen müssen (§. 96), es beweiset solches auch die Probe auf das Dividiren, da bekanter Massen das Product vom Quotienten und Divisoren dem Dividenden gleich sein muß (§. 97).

Von

Von den

Brüchen.

§. 121.

Was es überhaupt mit den gemeinen Brüchen für eine Bewandnis hat, dieselbige hat es auch hier mit den Brüchen der Grössen mit Buchstaben.

§. 122. Solchemnach wird entweder ein Bruch bezeichnet, da Zähler und Nenner bestimt, d. i. ihnen nach Masgab einer Vorgabe gewisse Buchstaben zugeeignet werden (§. 6), oder es wird eine Grösse bruchsweise dividirt (§. 102 u. f.).

Z. E. Es solten mit Buchstaben bezeichnet werden: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{14}{15}$ u. s. f. so könten solche mit Buchstaben also stehen:

$$\frac{a}{b} \text{ oder: } \frac{b}{c} \text{ oder: } \frac{a}{c} \text{ u. s. f.}$$

Oder die Grösse a solte mit b, $2ab$ mit c, $a + 3b$ mit c, $ab - c$ mit $3d$ und $\frac{1}{3}a + b$ mit $cd - 2b$ dividirt werden, so hätte man diese Formeln:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{2ab}{c}, \quad \frac{a + 3b}{c}, \quad \frac{ab - c}{3d}, \quad \frac{\frac{1}{3}a + b}{cd - 2b}$$

Dabei wohl zu merken ist, daß man bei der Algebra nicht sowohl die gemeinen Brüche mit Buchstabenbrüchen, weil solches insgemein mit einzelnen Buchstaben geschiehet (§.21), als vielmehr Grössen, welche dividirt werden sollen, in sothanen Formeln vorstellet.

§. 123. Sollen ganze Grössen, wie es öfters geschiehet, bruchsweise vorgestellet werden, d. i. ohne einen Nenner zu bestimmen, so wird, wie bei dem gemeinen Rechnen, anstatt desselben nur eine 1 genommen.

Z. E. $\frac{a}{1}$, $\frac{ab}{1}$, $\frac{a+b}{1}$ u. s. f.

§. 124. Sind ganze Grössen in Brüche zu verwandeln, worzu die Nenner bekant oder gegeben sind, so wird die Grösse, welche in einem Bruch vorgestellet werden sol, mit dem bekanten Nenner multiplicirt, und alsdann das Product zum Zähler genommen, da man dann einen sogenanten Scheinbruch erhält.

Z. E. Die Grössen a, ab, $a+bc$, a^2-bc solten als Theile vorgestellet werden, deren Benennung c sei, so hätte man folgende Formeln:

$$\frac{ac}{c},\ \frac{abc}{c},\ \frac{ac+bc^2}{c},\ \frac{a^2c-bc^2}{c}$$

welches auch ganz begreiflich ist: denn wenn z. E. 4 Ganze in Sechsteln vorgestellet werden sollen, so müssen die 4 Ganze erst mit 6 multipliciret, und das Product zum Zähler genommen werden, da man dann den Scheinbruch: $\frac{24}{6}$ erhält, woraus folget, daß, wann der Zähler den Nenner ein- oder mehrmahl in sich fasset, solches ein Scheinbruch sei, er bestehe aus Buchstaben oder Ziffern.

§. 125. Sind ganze Grössen und Theile derselben, d. i. eine vermischte Zahl, zu bezeichnen, so dürffen die Theile denen Ganzen nicht, wie bei den gemeinen Brüchen geschiehet, ohnmittelbar beigesezet werden, indeme solches eine Multiplication anzeigen würde, wie hernach folgen wird (§. 146), sondern man muß solche additionsweise hinzufügen.

Z. E. $4\frac{4}{5}$, wenn $4=a$ und $5=b$ genommen wird, also: $a+\frac{a}{b}$, besser aber im Aufsaz: $a+\frac{a}{b}$

Das

Das Product: ab und der sechste Theil desselben, wenn $6 = c$ genommen wird: $ab + \frac{ab}{c}$, oder: $ab + \frac{1}{6}ab$

Die dreifache Grösse: ac und der vierte Theil derselben, wenn $4 = b$ genommen wird: $3ac + \frac{3ac}{b}$, oder: $3ac + \frac{3}{4}ac$

Die Grösse: a und $\frac{3}{4}$ derselben, wann $4 = b$ genommen wird: $a + \frac{3a}{b}$; denn es solte die dreifache Grösse a dividirt werden, oder: $a + \frac{3}{4}a$

Die Grösse: $2a$ und $\frac{3}{4}$ derselben, wenn $4 = b$ sein sol: $2a + \frac{6a}{b}$; denn $2a$ muß dreifach genommen werden, oder: $2a + \frac{3}{4}a$

Die Grösse: $\frac{1}{3}bc$ und $\frac{4}{5}$ derselben, wenn $5 = d$ sein sol: $\frac{1}{3}bc + \frac{1\frac{1}{3}bc}{d}$; denn 4 mahl $\frac{1}{3}$ ist $1\frac{1}{3}$, oder: $\frac{1}{3}bc + \frac{4}{5}$ aus $\frac{1}{3}bc$, das ist: $\frac{4}{15}bc$

§. 126. **Sollen aber Theile von einer andern Grösse zu Ganzen gefüget werden**, so müssen auch andere Buchstaben darzu genommen und den Ganzen ihre Zahlen, d. i. Coefficienten vorgesezet werden.

Z. E. 20 Thlr. und $\frac{3}{4}$ fl kan heissen: $20a + \frac{c}{b}$

Oder: 5 Thlr. weniger $\frac{5}{6}$ fl und 8 ℔ kan bezeichnet werden: $5a + 8b - \frac{c}{d}$

§. 127. **Sind Ganze und ein Bruch zu gleicher Benennung zu resolviren, oder gleich zu grössern**, so werden die Ganze mit des Bruchs Nenner multipliciret, der Zähler zum Product addirt und der Nenner beibehalten, so hat man einen Scheinbruch (§. 124), und, so der Nenner wegbleibet, eine gleich gegrösserte Grösse.

Scheinbrüche.

$$a + \frac{a}{b} \qquad ab + \frac{ab}{c} \qquad 3ac + \frac{3ac}{b} \qquad a + b - \frac{c}{d}$$

$$\frac{ab + a}{b} \qquad \frac{abc + ab}{c} \qquad \frac{3abc + 3ac}{b} \qquad \frac{ad + bd - c}{d}$$

Nota. Bei einem negativen Bruch wird der Nenner oder Divisor allezeit als positiv behandelt, wann er nicht besonders das Zeichen — hat (§. 106).

Gegrösserte Brüche.

$$a + \frac{3a}{b} \qquad 2a + \frac{6a}{b} \qquad \frac{1}{3}bc + \frac{1\frac{1}{3}bc}{b} \qquad \frac{1}{4}a + \frac{c}{2b}$$

$$ab + 3a \qquad 2ab + 6a \qquad \frac{1}{3}b^2c + 1\frac{1}{3}bc \qquad \frac{1}{2}ab + c$$

$$\frac{1}{3}a^2 + bc + \frac{d^2 + e}{\frac{1}{4}b - a} \qquad\qquad a + \frac{2a}{4} + b$$

$$\frac{1}{12}a^2b + \frac{1}{4}b^2c - \frac{1}{3}a^3 - abc + d^2 + e \qquad\qquad 4a + 2a + 4b$$

§. 128. Sollen zween Brüche von ungleichen Nennern zu gleicher Benennung resolvirt werden, so wird erst jeder Zähler mit dem gegenseitigen Nenner multiplicirt, so hat man beide Zähler, und das Product beider Nenner ist alsdann der gemeinschaftliche Nenner.

Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ $\qquad\qquad$ $\frac{a}{b} + \frac{b}{c}$

$\frac{ac}{bc} + \frac{ab}{bc}$ oder: $\frac{ac + ab}{bc}$ $\qquad\qquad$ $\frac{ac + b^2}{bc}$

Lässet man die Nenner weg, so hat man, wie vorhin, gegrösserte Brüche, als:

$$\frac{2c}{b + a} + \frac{b - a + d}{d}$$

$2cd + b^2 - ab + bd + ab - a^2 + ad$ Red. $2cd + b^2 + bd - a^2 + ad$

§. 129. Sind die Brüche von gleicher Benennung, so werden solche gleich gegrösset, wenn die Nenner schlechthin weggethan werden.

Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{2c}{b}$ $\frac{a + \frac{1}{3}c}{d} + \frac{\frac{1}{4}a - b}{d}$ $\frac{2ac}{d} + \frac{\frac{1}{2}ab}{d}$

$a + 2c$ $a + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}a - b$ $2ac$ $\frac{1}{2}ab$

§. 130. Hat man mehr als zween Brüche gleichnahmig zu resolviren oder zu grössern, so werden erst zween wie §. 128 behandelt, alsdann wird der dritte zu den erhaltenen Grössen gesezet, diese mit dem Nenner und die Nenner mit dem Zähler durcheinander multiplicirt, und so auch mit dem vierten und übrigen Brüchen, wann deren noch vorhanden sind, verfahren.

Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$ gleich zu grössern.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$ad + bc \quad - \frac{e}{f}$$

$$adf + bcf - ebd$$

Item: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{b}{a}$ gleich zu grössern.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$ad + bc \quad + \frac{e}{f}$$

$$adf + bcf + ebd \quad + \frac{b}{a}$$

$$a^2df + abcf + aebd + b^2dfa$$

Item: $a + \frac{cd}{a^2} + \frac{b - ce}{d} + \frac{f}{de}$

Oder:

Oder: da a zur Deutlichkeit zum Bruch gemacht wird (§. 123).

$$\frac{a}{1} + \frac{cd}{a^2} + \frac{b - ce}{d} + \frac{f}{de}$$

$$\frac{a}{1} + \frac{cd}{a^2}$$

$$a^3 + 1cd + \frac{b - ce}{d}$$

$$da^3 + cd^2 + 1a^2b - 1a^2ce + \frac{f}{de}$$

$$d^2a^3e + cd^3e + a^2bde - a^2cde^2 + fa^2d$$

Sol diese Resolution Anfängern leichter und begreiflicher gemacht werden, so sezet man unter die erhaltene Grössen, nach §. 128, ihren gemeinschaftlichen Nenner, also:

$$\frac{a}{1} + \frac{cd}{a^2}$$

$$\frac{a^3 + 1cd}{1a^2} + \frac{b - ce}{d}$$

$$\frac{da^3 + 1cd^2 + 1a^2b - 1a^2ce}{a^2d} + \frac{f}{de}$$

$$d^2a^3e + cd^3e + a^2bde - a^2cde^2 + fa^2d$$

Zu diesen Gliedern wäre nun der gemeinschaftliche Nenner a^2d^2e, wenn noch mehrere Brüche vorhanden wären, die hierzu gleichnahmig resolviret werden solten.

Dieses Grössern wird bei dem Addiren (§. 138) auf eine andere Art gezeiget werden, und zwar wie hiernächst mit Ziffern geschiehet.

§. 131. Stehen den Gliedern einer Grösse ungleichnahmige gebrochene Coefficienten vor, so müssen dieselbige erst weggeschaffet und zu ganzen Zahlen gegrössert werden, welches eben, wie mit Buchstaben gezeiget worden, geschehen kan, am sichersten aber mittelst eines Hauptnenners geschiehet, worauf man die Buchstabenbrüche wie vorhin behandelt.

Z. E. $\frac{1}{4}\frac{b}{c} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{b} - \frac{3}{4}\frac{ab}{c} + \frac{2}{5}\frac{e}{d}$

$15\frac{b}{c} + 20\frac{a^2}{b} - 45\frac{a}{c} + 24\frac{e}{d}$

60: $\frac{1}{4}$. 15; $\frac{1}{3}$. 20; $\frac{3}{4}$. 45; $\frac{2}{5}$. 24

Item, da sich auch ganze Coefficienten dabei befinden:

$\frac{1}{2}\frac{b}{c} + 3\frac{cd}{a} - 2\frac{1}{2}\frac{a^2}{d} + \frac{3}{5}\frac{ef}{d}$

$5\frac{b}{c} + 30\frac{cd}{a} - 25\frac{a^2}{d} + 6\frac{ef}{d}$

10: $\frac{1}{2}$. 5; $\frac{3}{1}$. 30; $\frac{5}{2}$. 25; $\frac{3}{5}$. 6

§. 132. Haben gebrochene Coefficienten gleiche Nenner, so weiß man, daß solche nur weggethan werden, da dann die Zähler die Ganze sind (§. 129), und so sich ganze Coefficienten dabei befinden, werden diese mit dem Nenner gegrössert.

Z. E. $\frac{2}{3}\frac{a}{b} + 1\frac{1}{3}\frac{bc}{a} - 4\frac{ab^2}{d} + 1\frac{de}{a}$

$2\frac{a}{b} + 4\frac{bc}{a} - 12\frac{ab^2}{d} + 3\frac{de}{a}$

§. 133. Sind die Coefficienten gebrochene Brüche, so werden solche erst zu einfachen Brüchen resolvirt und hernach, wie vorhin, gegrössert.

Z. E. $\frac{\frac{1}{2}}{4}a + \frac{1\frac{1}{2}}{4}b^2$ Item $\frac{\frac{1}{2}}{4}x^2 + \frac{1\frac{1}{4}}{5}x^3 + \frac{2\frac{1}{3}}{6}bc$

Einf. Br. $\frac{1}{8}a + \frac{3}{8}b^2$ Einf. Br. $\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{18}bc$

Gegr. Br. $1a + 3b^2$ Gegr. Br. $9x^2 + 18x^3 + 28bc$

72: $\frac{1}{8}$. 9; $\frac{1}{4}$. 18; $\frac{7}{18}$. 28

Item, y^3 mit 8, $-3y^2$ mit 4 und $2\frac{3}{4}y$ mit 2 dividirt, gleich zu grössern, wobei y^3 der Coefficient 1 zur Deutlichkeit vorgesezet werden kan (§. 38).

$\frac{1y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} + \frac{2\frac{3}{4}y}{2}$

Einfache Brüche: $\frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{11}{8}y$

Gegrösserte Brüche: $1y^3 - 6y^2 + 11y$

8: $\frac{1}{8}$. 1; $\frac{3}{4}$. 6; $\frac{11}{8}$. 11

§. 134. Enthält der Zähler eines Bruchs einen oder etliche Buchstaben, aus welchen der Nenner bestehet, oder der Nenner ist eine Eins (§. 123), so ist derselbe ein Scheinbruch (§. 127), und wird reducirt, wann man denselben mit dem Nenner dividirt, gleich wie er §. 124 entstanden ist.

Z. E. $\frac{ac}{c}$ wird reducirt: $c)\ ac \mid a$

$\frac{abc}{b}$ = = = $b)\ abc \mid ac$

$\frac{a^2bc}{a}$ = = = $a)\ a^2bc \mid abc$

$\frac{ac + bc^2}{c}$ = = = $c)\ ac + bc^2 \mid a + bc$

$\frac{a^2c - bc^2}{c}$ = = = $c)\ a^2c - bc^2 \mid a^2 - bc$

§. 135. Enthält aber der Zähler keinen oder doch nur einen oder etliche Buchstaben des Nenners, so ist der Bruch ein ächter Bruch (§ 122), und kan durch sothane Buchstaben, wie gemeine Brüche durch eine sogenante Hebzahl, reducirt werden, oder man thut die gleiche Buchstaben oder Factoren des Zählers und Nenners nur schlechthin weg, so ist der Bruch reducirt.

Z. E. $\frac{ac}{bc} \Big| \frac{a}{b}$ $\frac{abc}{bcd} \Big| \frac{a}{d}$ $\frac{bcde}{cdef} \Big| \frac{b}{f}$ $\frac{2a^2b}{b^2} \Big| \frac{2a^2}{b}$ $\frac{ab + cb}{ad + cd} \Big| \frac{b}{d}$

denn da oben und unten $a + c$ weggethan worden, blieben übrig: $\frac{b + b}{d + b}$ welche abermahl reducirt $\frac{b}{d}$ übrig liesen.

Item: $\frac{abc - acd}{ebc - ecd} \Big| \frac{a - a}{e - e}$ Also bedeutet der Bruch nichts.

Oder, da die Coefficienten reducirt werden:

$\frac{2a}{4} \Big| \frac{a}{2}$ $\frac{2a}{4b} \Big| \frac{a}{2b}$ $\frac{4a}{6b} \Big| \frac{2a}{3b}$ Item: $\frac{10a^3 + 60a^2}{100} \Big| \frac{a^3 + 6a^2}{10}$

$$\text{Item: } \frac{ab - 4a}{2ab - 4a} \Big| \frac{b - 4}{2b - 4} \Big| \overset{2}{\frac{\frac{1}{2}b - 2}{1b - 2}}$$

Daß diese Reduction ihre Richtigkeit habe, kan bewiesen werden, wenn man denen Buchstaben beliebige Zahlen zueignet (§. 12), da dann der unreducirte und reducirte Bruch gleiche Wehrte haben müssen.

Z. E. a sei $= 2$, $b = 3$, so ist der Zähler des unreducirten Bruchs:

$$\begin{array}{rr} ab = & 6 \\ -4a = & -8 \\ \hline & -2 \end{array}$$

und der Nenner:

$$\begin{array}{rr} 2ab = & 12 \\ -4a = & -8 \\ \hline & 4 \end{array}$$

mithin der unreducirte Bruch: $-\frac{2}{4}$

Ferner, der Zähler des reducirten Bruchs:

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{2}b = & 1\frac{1}{2} \\ & -2 \\ \hline & -\frac{1}{2} \end{array}$$

und der Nenner:

$$\begin{array}{rr} b = & 3 \\ & -2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

mithin der reducirte Bruch: $\frac{-\frac{1}{2}}{1}$

Werden nun beide Zähler mit ihren Nennern dividirt, so komt einerlei Wehrt, als:

4) $-2 \mid -\frac{1}{2}$ Der Wehrt vom unreducirten Bruch.
1) $-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}$ Der Wehrt vom reducirten Bruch.

Item,

Item, da der Zähler oder Nenner in Ansehung ihrer Zeichen reducirt werden können:

z. E. $\frac{-8+8b+3}{12}$ ist reducirt: $\frac{-5+8b}{12}$

oder umgewandt:

$$\frac{12}{-8+8b+3} \text{ ist reducirt: } \frac{12}{-5+8b}$$

Item: $\frac{2a+ab-6a}{bc}$ ist reducirt: $\frac{-4a+ab}{bc}$

Item, da verschiedene Brüche gleiche Nenner haben, wie bereits §. 128 vorgekommen:

$$\frac{2b}{a}+\frac{c}{a} \text{ ist reducirt: } \frac{2b+c}{a}$$

$$\frac{2c}{a}-\frac{b}{a} \text{ giebt: } \frac{2c-b}{a}$$

Nota. Wann ein mit Buchstaben bezeichneter Bruch die Kennzeichen eines Scheinbruchs hat (§. 134), so ist der Wehrt desselben auch in gemeinen Zahlen ein Scheinbruch; hat er aber die Kennzeichen eines ächten Bruchs (§. 135), so folget daraus nicht, daß er auch in gemeinen Zahlen ein ächter Bruch seyn müsse (vergl. mit §. 179 Nota).

Z. E. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist ein ächter Bruch, wann $a=3$ und $b=4$ genommen wird; ist aber $a=4$ und $b=3$, so ist er in gemeinen Zahlen ein Scheinbruch.

* * *

§. 136.

Das Addiren der Brüchen geschiehet überhaupt wie §. 62, da dieselbige mit ihren Zeichen nur schlechthin nebeneinander gesezet und hernach reduciret werden.

§. 137. Haben die addirte Brüche gleiche Nenner, so wird nur einer derselbigen unter die Summe gesezet und solche damit reduciret (§. 128. 135).

Z. E. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} + \frac{d}{b}$ also: $\frac{a - c + d}{b}$

Item: $\frac{ab}{c} + \frac{de}{c} + \frac{ab}{c}$ also: $\frac{2ab + de}{c}$

§. 138. Sollen addirte Brüche von ungleichen Nennern unter einen Nenner gebracht werden, so multiplicirt man alle Nenner durch- oder miteinander, um einen gemeinschaftlichen oder Hauptnenner zu erhalten, welcher alsdann, wie bei dem gemeinen Rechnen, mit eines jeden Bruchs Nenner dividirt und der Quotient mit dem Zähler multiplicirt wird.

Z. E. Von $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{ef}$ ist der Hauptnenner cef und die Addition also:

$$cef$$

$$\frac{b}{c} \,.\, ef \,.\, bef$$

$$\frac{d}{ef} \,.\, c \,.\, cd$$

$$\frac{bef + cd}{cef}$$

Item:

$$\overbrace{\qquad}^{c^2 e}$$

Item: $\frac{b}{c} \cdot ceb$

$\frac{d}{e} \cdot c^2 d$

$\frac{d}{c} \cdot ced$

$$\frac{ceb + c^2 d + ced}{c^2 e}$$

Item: Was thut die Summe dieser Brüchen, gleichnahmig resolvirt?

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} - \frac{c}{d} + \frac{d}{e}$$

$$\overbrace{\qquad}^{bcde}$$

$\frac{a}{b} \cdot cde. \quad cdea$

$\frac{b}{c} \cdot bde. \quad b^2 de$

$-\frac{c}{d} \cdot bce. - bc^2 e$ (s. §. 127 Not.)

$\frac{d}{e} \cdot bcd. \quad bcd^2$

$$\frac{cdea + b^2 de - bec^2 + bcd^2}{bcde}$$

Dem Ansehen nach solte man meinen, daß diese Summe ein Scheinbruch wäre; allein, da mit dem Nenner kein Glied dividirt werden kan, weil er kein Factor von einem Glied ist (§. 99), so ist es ein ächter Bruch (§. 135): werden aber den Gliedern gemeine Ziffern zugeeignet, so erhält man einen Scheinbruch (§. 135 Nota).

Auf diese Weise kan auch die §. 130 gezeigte Grösserung der Glieder verrichtet werden.

Z. E. die Brüche sind addiret:

$$a + \frac{cd}{a^2} - \frac{b - ce}{d} + \frac{f}{de}$$

Oder, da a auch als ein Bruch vorgestellet wird (§. 123):

$$\frac{a}{1} + \frac{cd}{a^2} - \frac{b - ce}{d} + \frac{f}{de}$$

Von diesen Brüchen ist der Hauptnenner: $1a^2d^2e$, und das Grössern also:

$$a^2d^2e$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{1} & . a^2d^2e & . a^3d^2e \\ \frac{cd}{a^2} & . d^2e & . d^3ce \\ -\frac{b}{d} & . a^2de & . -a^2dbe \\ -\frac{ce}{d} & . a^2de & . -a^2dce^2 \\ \frac{f}{de} & . a^2d & . a^2df \end{array}\right\} \text{Gegrösserte Glieder.}$$

Item, da der Nenner oder Zähler eine gemeine Zahl hat:

$$\begin{array}{l} 5b \\ \frac{a}{b} . 5a \\ \frac{c}{5} . bc \\ \hline \frac{5a + bc}{5b} \end{array} \qquad \text{Item: } \begin{array}{l} ac \\ \frac{4}{a} . 4c \\ \frac{b}{c} . ab \\ \hline \frac{4c + ab}{ac} \end{array} \qquad \text{Item: } \begin{array}{l} ab \\ \frac{3}{a} . 3b \\ \frac{4}{b} . 4a \\ \hline \frac{3b + 4a}{ab} \end{array}$$

$$a^2 + 4a$$

$$\text{Item: } \begin{array}{l} \frac{12}{a} . a + 4 . 12a + 48 \\ \frac{12}{a + 4} . a . \quad 12a \\ \hline \frac{24a + 48}{a^2 + 4a} \end{array}$$

§. 139.

§. 139. Stehen vor den Brüchen ganze oder gebrochene Coefficienten, so bleiben solche vor den gegrösserten Gliedern stehen; im Fall es aber nöthig ist, werden die gebrochene Coefficienten wie §. 131 gegrössert: die vorstehende positive oder negative Grössen aber (§. 127) werden lediglich für sich behandelt, weil sie keinen Bezug auf die Theile haben können.

$$\begin{array}{rlll} & & \underbrace{cbd}_{} & \\ \text{Z. E.} \quad & a + \frac{b}{c} & .\, bd\, . & b^2 d \\ & -2b + \frac{c}{b} & .\, cd\, . & c^2 d \\ & a - \frac{c}{d} & .\, cb\, . & -c^2 b \quad \text{(s. §. 127 Not.)} \\ \hline & -2b + 2a & & + \frac{b^2 d + c^2 d - c^2 b}{cbd} \end{array}$$

Nota I. Die Addition complexer gebrochener Grössen geschiehet wie §. 64.

Nota II. Die Addition einer Reihe Brüche, wie solche in einer geometrischen Progression absteigen, wird unten §. 335 u. f. gezeiget.

* * *

§. 140.

Das Subtrahiren der Brüchen geschiehet überhaupt wie §. 68, da dieselbige unter verkehrten Zeichen nur schlechthin nebeneinander gesezet, und hernach reduciret werden.

§. 141. Haben die Brüche gleiche Nenner, so wird, wie vorhin bei dem Addiren, nur einer derselben unter die Zähler, oder eigentlich unter den Unterschied (§. 68), gesezet und damit die Reduction verrichtet.

Z. E.

Z. E. $\frac{c}{b}$ von $\frac{a}{b}$ zu subtrahiren: $\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ reducirt: $\frac{a-c}{b}$

$$\frac{de}{c} ; -\frac{ab}{c} ; ; ; -\frac{ab}{c} - \frac{de}{c} ; ; \frac{-ab-de}{c}$$

$$-\frac{bc}{a} ; \frac{de}{a} ; ; ; \frac{de}{a} + \frac{bc}{a} \text{ (s. §. 71) } \frac{de+bc}{a}$$

$$-\frac{da}{e} ; -\frac{ef}{e} ; ; ; -\frac{ef}{e} + \frac{da}{e} ; ; \frac{-ef+da}{e}$$

§. 142. Hat eine subtrahirte Grösse, oder vielmehr ein Unterschied, ungleiche Nenner, so werden solche, wie §. 138, unter einen Nenner gebracht und somit reducirt.

Z. E. Von $\frac{a}{d}$ sol $\frac{c}{b}$ subtrahirt werden, so ist die Formel: $\frac{a}{d} - \frac{c}{b}$ und die Reduction:

$$\begin{array}{l} \overbrace{\quad}^{bd} \\ \frac{a}{d} . b . \quad ab \\ -\frac{c}{b} . d \quad -cd \\ \hline \quad \frac{ab-cd}{bd} \end{array}$$

Von $\frac{ab}{d}$ sol $-\frac{de}{c}$ subtrahirt werden: $\frac{ab}{d} + \frac{de}{c}$

$$\text{Reduction: } \begin{array}{l} \overbrace{\quad}^{cd} \\ \frac{ab}{d} . c . abc \\ \frac{de}{c} . d . d^2e \\ \hline \frac{abc+d^2e}{cd} \end{array}$$

Nota I. Was §. 139 wegen der Coefficienten und ganzen Grössen gesaget und gezeiget worden, solches ist auch hier zu beobachten.

Nota II. Die Subtraction complexer gebrochenen Grössen geschiehet wie §. 73.

* * *

§. 143.

Das Multipliciren der Brüchen geschiehet eben, wie die gemeine Multiplication derselben, indeme man die Zähler und Nenner nur miteinander multiplicirt, und das Product, wo es thunlich ist, reducirt, wobei aber die Regeln §. 78 nicht zu vergessen sind.

Z. E. $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ giebt: $\frac{ac}{bd}$ Item: $\frac{a}{b}$ mit $\frac{1}{3}$ giebt: $\frac{a}{b3}$

$-\frac{a}{b}$ „ $-\frac{c}{d}$ „ $\frac{ac}{bd}$ „ „ $\frac{2}{3}$ „ $\frac{b}{c}$ „ $\frac{2b}{3c}$

$\frac{a}{b}$ „ $-\frac{c}{d}$ „ $-\frac{ac}{bd}$ „ „ $\frac{a}{b}$ „ $1\frac{1}{2}$

$-\frac{a}{b}$ „ $\frac{c}{d}$ „ $-\frac{ac}{bd}$ „ „ $\frac{a}{b}$ „ $\frac{3}{2}$ „ $\frac{a3}{b2}$

§. 144. **Wann ein Bruch mit einem andern Bruch multiplicirt wird, so erhält man zwar einen grössern Bruch, aber kleinere Theile, und also weniger, als der Multiplicand ist, wovon die Ursache nach der gemeinen Multiplication bekant sein muß;** denn $\frac{2}{3}$ mahl $\frac{3}{4}$, oder, welches einerlei: $\frac{3}{4}$ mahl $\frac{2}{3}$, bringt zum Product $\frac{1}{2}$, welches durch die Regel de Tri bewiesen, und demnächst auch klar wird, wann man sothane Multiplication nach §. 80 Not. I. nach den Wörtern aus und von betrachtet.

§. 145. **Hat man complexe Zähler und Nenner,** so geschiehet die Multiplication der Zähler und Nenner wie §. 81 gezeiget worden.

Z. E. $\frac{a+b}{b-c}$ mit $\frac{b-c}{c+d}$ zu multipliciren:

Zähler: $a+b$ Nenner: $b-c$
Zähler: $b-c$ Nenner: $c+d$

$ab+b^2-ac-bc$ Neuer Zähler. $bc-c^2+db-cd$ Neuer Nenner.

Also ist das Product:

$$\frac{ab+b^2-ac-bc}{bc-c^2+db-cd}$$

§. 146.

§. 146. Ist der eine Factor eine ganze Zahl, und der andere Factor ein Bruch, so wird die ganze Zahl bruchsweise vorgestellet (§. 123.), und wie vorhin verfahren, oder man sezet die ganze Zahl nur neben den Bruch, so hat man einen ganzen und einen gebrochenen Factoren (§. 125).

Z. E. $\frac{a}{1}$ mit $\frac{c}{d}$ giebt: $\frac{ac}{d}$ oder: $a\frac{c}{d}$

$-\frac{a}{1}$ " $\frac{c}{d}$ " $-\frac{ac}{d}$ " $-a\frac{c}{d}$

$-\frac{a}{1}$ " $-\frac{c}{d}$ " $\frac{ac}{d}$ " $a\frac{c}{d}$

Wenn also eines Bruchs Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so ist der Bruch multiplicirt; und so man einen oder etliche, oder alle Factoren des Zählers wegthut, in welchem leztern Fall für den Zähler 1 gesezet wird, und sezet den- oder dieselben vor den Bruch, so ist derselbe reducirt.

Z. E. $\frac{ab}{b}$ ist so viel, als $a\frac{b}{c}$ oder: $ab\frac{1}{c}$;

denn nimt man zum Beweis dessen $a=4$, $b=3$, und $c=2$, so ist 3 mahl 4 mit 2 dividirt so viel, als 4 mit $\frac{3}{2}$, d. i. $1\frac{1}{2}$, oder 4 mahl 3 mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt.

§. 147. Sind ein- oder beiderseits Ganze und Brüche, so werden die Ganzen und Brüchen zu Scheinbrüchen resolvirt (§. 127), und die Multiplication wie vorhin verrichtet.

Z. E. $a+\frac{c}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ zu multipliciren.

$\frac{ab+c}{b} \times \frac{c}{d}$ komt: $\frac{abc+c^2}{bd}$

$a-\frac{c}{b}$ mit c

$\frac{ab-c}{b} \times \frac{c}{1}$ komt: $\frac{cab-c^2}{b}$ red. $ac-\frac{c^2}{b}$ (§.134)

$$\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} \text{ mit } \frac{2a}{1} \text{ komt: } \frac{ab - 4a}{b - 2} \text{ red. } a + \frac{-a2}{b - 2} \text{ (§.134)}$$

$$a + \frac{b}{c} \text{ mit } b + \frac{c}{d} \qquad \text{Zähler: } ac + b \quad \text{Zähler: } bd + c$$

$$\frac{ac + b}{c} \times \frac{bd + c}{d} \qquad \frac{abcd + db^2 + ac^2 + bc}{cd} \text{ Product.}$$

$$ac + \frac{c}{b} \text{ mit } b - \frac{a}{b} \qquad \text{Zähler: } abc + c \quad \text{Zähler: } b^2 - a$$

$$\frac{abc + c}{b} \times \frac{b^2 - a}{b} \qquad \frac{ab^3c + b^2c - a^2bc - ac}{b^a} \text{ Product.}$$

$$3 + \frac{a}{b} \text{ mit } \frac{2c}{d}$$

$$\frac{3b + a}{b} \times \frac{2c}{d} \text{ giebt: } \frac{6bc + 2ac}{bd}$$

$$2 + \frac{2a}{b} \text{ mit } 3c$$

$$\frac{2b + 2a}{b} \times \frac{3c}{1} \text{ giebt: } \frac{6bc + 6ac}{b}$$

$$3a + \frac{a}{b} \text{ mit } 2 + \frac{2c}{d} \qquad \text{Zähler: } 3ab + a \quad \text{Zähler: } 2d + 2c$$

$$\frac{3ab + a}{b} \times \frac{2d + 2c}{d} \qquad \frac{6abd + 2da + 6abc + 2ac}{bd} \text{ Prod.}$$

Vorstehende Scheinbrüche könten zwar reducirt werden, es blieben aber allezeit Brüche, mithin würde kein Vortheil dadurch erhalten (s. §. 119).

§. 148.

§. 148. Sol ein Bruch mit sich selbst multipliciret, d. i. quadriret werden, so hat man vorstehende Proceduren nicht allezeit nöthig, sondern man füget nur Zähler und Nenner den Exponenten 2 bei, so ist die Multiplication geschehen.

Z. E. $\frac{a}{b}$ mit $\frac{a}{b}$ giebt: $\frac{a^2}{b^2}$

$$\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} \text{ mit sich selbst, giebt: } \frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(b - 2)^2}$$

Denn da der Exponent ein jedes Glied des Zählers und Nenners angehet, so wurden solche ein- oder zusammen geschlossen (vergl. mit §. 85).

Item: $\frac{b - \frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}d}$ mit sich selbst multiplicirt, giebt: $\frac{(b - \frac{1}{2}d)^2}{\frac{1}{2}d^2}$

Item: $\frac{a - \frac{c}{d}}{a - \frac{c}{d}}$ giebt: $\frac{\left(a - \frac{c}{d}\right)^2}{\left(a - \frac{c}{d}\right)^2}$

Item: $a - \frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$ mit sich selbst zu multipliciren.

$$\frac{a - \frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}}{a^2 - a\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} - a\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} + \frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(b - 2)^2}}$$

Reducirt; $a^2 - 2a\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} + \frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(b - 2)^2}$

* * *

§. 149.

Das Dividiren mit Brüchen geschiehet eben, wie die gemeine Division derselben, indeme man den Divisoren umwendet, d. i. den Nenner zum Zähler und den Zähler zum Nenner machet, alsdann, wie vorhin, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciret, dabei die Regel §. 96 beobachtet, und, wo es thunlich ist, den Quotienten reducirt (§. 134 u. f.).

Z. E. $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{c}$ zu dividiren.

$\frac{a}{c}$ umgewandt $\frac{c}{a} \times \frac{a}{b}$ giebt: $\frac{ca}{ab}$ u. reduc. $\frac{c}{b}$ (§. 135).

Item: $\frac{a}{bc}$ durch $-\frac{de}{b}$

$-\frac{de}{b}$ umgew. $-\frac{b}{de} \times \frac{a}{bc}$ giebt: $-\frac{ab}{debc}$ reducirt: $\frac{a}{dec}$

Item: $\frac{a}{b}$ durch $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ umgew. $\frac{3}{1} \times \frac{a}{b}$ giebt: $\frac{3a}{b}$

Item: $\frac{a}{b}$ durch $1\frac{1}{2}$

$\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$ umgew. $\frac{2}{3} \times \frac{a}{b}$ giebt: $\frac{2a}{3b}$

Item: $1\frac{1}{3}$ durch $\frac{b}{c}$

$\frac{b}{c}$ umgew. $\frac{c}{b} \times \frac{1\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$ giebt: $\frac{4c}{3b}$

§. 150. Wann ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt wird, so erhält man einen grössern Bruch, und der auch würklich am Wehrt mehr, als der Dividend ist, wovon die Ursache, wie bei dem Multipliciren (§. 144), nach der gemeinen Division bekant sein muß; denn $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt, bringt $1\frac{1}{8}$ zum Quotienten, welches durch die Regel de Tri bewiesen und demnächst auch klar wird, wann man sothane Division nach §.98 Not.I. nach den Wörtern mit oder durch betrachtet.

§. 151. Ist der Divisor und der Dividend eine complexe Grösse, so wird ersterer, wie vorhin, umgewandt, alsdann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner gewöhnlich multiplicirt, und der auf solche Art erhaltene Quotient reducirt.

Z. E. $\frac{a+b}{b-c}$ durch $\frac{c+d}{b-c}$ zu dividiren.

$\frac{c+d}{b-c}$ umgewandt $\frac{b-c}{c+d} \times \frac{a+b}{b-c}$

Des Divisoren Zähler: $b-c$ Des Divisoren Nenner: $c+d$
Des Dividenden Zähler: $a+b$ Des Dividenden Nenner: $b-c$

$ab-ac+b^2-bc$ $bc+bd-c^2-cd$

$$\frac{ab-ac+b^2-bc}{bc+bd-c^2-cd} \text{ Quotient.}$$

§. 152. Sol ein Bruch mit einer ganzen Grösse, oder diese mit einem Bruch dividirt werden, so wird die ganze Grösse als ein Bruch vorgestellet (§.146), und wie vorhin verfahren.

Z. E. $\frac{a}{1}$ umgewandt $\frac{1}{a} \times \frac{c}{d}$ giebt: $\frac{c}{ad}$ zum Quotienten.

$\frac{b}{c}$: : : $\frac{c}{b} \times \frac{a}{1}$: : $\frac{ac}{b}$: : : :

Item:

Item: $a + \frac{c}{b}$ durch $\frac{c}{d}$

$$\frac{c}{d} \text{ umgew. } \frac{d}{c} \times \frac{\overline{a + \frac{c}{b}}}{} \;\; \frac{ab + c}{b} \text{ komt: } \frac{dab + dc}{cb}$$

Item: $a - \frac{c}{b}$ durch c

$$\frac{c}{1} \text{ umgew. } \frac{1}{c} \times \frac{ab - c}{b} \text{ komt: } \frac{ab - c}{cb}$$

Item: mit $2a$ die Grösse: $\frac{ab - 4a}{b - 2}$ zu dividiren.

$$\frac{2a}{1} \text{ umgew. } \frac{1}{2a} \times \frac{ab - 4a}{b - 2} \text{ giebt: } \frac{ab - 4a}{2ab - 4a} \text{ red. } \frac{b - 4}{2b - 4} \Big| \overset{2}{\frown} \frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$$

Die Probe hievon s. §. 135.

Wann also eines Bruchs Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so ist der Bruch dividirt, und so man einen oder etliche, oder auch alle Factoren des Nenners wegthut, in welch leztern Fall 1 für den Nenner genommen werden kan, so ist derselbe multiplicirt (s. §. 146).

Z. E. $\frac{b}{c}$ durch a dividirt, giebt: $\frac{b}{ac}$, diesen Bruch mit a multiplicirt, giebt: $\frac{b}{c}$, und abermahl diesen mit c, bringt: $\frac{b}{1}$.

§. 153. Bestehet der Divisor und Dividend aus einer ganzen und gebrochenen Grösse, so werden beide zu Scheinbrüchen resolviret (§. 147), und sodann wie gewöhnlich verfahren.

§. 154. Bei dem Multipliciren gilt es gleich, wie die Factoren stehen (§. 22. 143), hier aber muß der Divisor wohl gemerket, und wie gezeiget worden, vorne stehen (§. 149 u. f.).

§. 155. Hierbei ist noch zu merken, daß bei einem jeden Bruch der Zähler als ein Dividend, und der Nenner als ein Divisor betrachtet werden müsse.

§. 156. Dahero wird überhaupt eine jede Grösse dividirt, wenn der Divisor bruchsweise darunter gesezet wird (§. 103. 105. 118. 122).

§. 157. Kan aber der Zähler durch den Nenner würklich dividirt werden, so ist es eine Reduction des Bruchs, welche §. 134 gezeiget worden.

Von den

Quadratgrössen

und

Ausziehung ihrer Wurzeln.

§. 158.

Wann eine Grösse mit ihr selbst multipliciret wird (§. 24), so heisset das Product eine Quadratgrösse, und wann aus einer solchen Grösse diejenige Grösse gesuchet werden sol, durch welche sie entstanden ist, so heisset man solches: die Quadratwurzel ausziehen.

§. 159. Damit dieses bei den Buchstaben desto begreiflicher gemacht, auch hernach bei der Algebra nach Erfordernis der Resolution (§. 12) die Quadratwurzel aus gemeinen Zahlen ohne Anstand ausgezogen werden könne, so folget:

I. Von Quadratgrössen in gemeinen Zahlen und Ausziehung ihrer Wurzeln.

§. 160. Sol aus einer Quadratzahl, welche aus einer oder zwo Ziffern bestehet, die Wurzel gezogen werden, so kan solches mittelst des sogenanten Ein mahl Eins, und also ohne Rechnung geschehen, wie nachstehendes Wurzeltäfelein zeiget:

Quadratzahlen:	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Die Wurzeln aus denselben:	1	2	3	4	5	6	7	8	9

 §. 161.

§. 161. Bestehet aber die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden sol, aus mehr als zwo Ziffern, so sind überhaupt folgende Regeln dabei zu merken:

1) Wird die Zahl von der Rechten zur Linken zu zwo und zwo Ziffern in Glieder abgetheilet, es mag in das lezte Glied eine oder zwo Ziffern zu stehen kommen.

2) Suchet man im vorstehenden Wurzeltäfelein

a) Die Quadratzahl, welche dem ersten Glied linker Hand am nähesten komt, und sich von demselben subtrahiren lässet:

b) Sezet solche unter dasselbige, und bezeichnet ihren ganzen Wehrt, welchen sie nach der Stelle, auf welcher sie stehet, erhält, mit Nullen oder Pünctlein:

c) Subtrahirt sie von der ganzen Grösse:

d) Schreibet ihre Wurzel, welche in dem Wurzeltäfelein darunter stehet, wie bei der gemeinen Division den Quotienten, rechter Hand hinter eine Perpendicular- oder Scheidungslinie, und

e) Bezeichnet ihren Wehrt, d. i. sezet sothaner Wurzel so viele Pünctlein bei, als bei der Grösse noch Glieder übrig sind, indeme eben so viele Wurzelziffern noch folgen müssen,

so ist die erste Wurzelziffer gefunden.

Hierauf werden zur Ausziehung einer jeden der folgenden Wurzelziffern zwo Operationen angestellet, als:

1) Dividirt man mit dem Duplum der vorhandenen Wurzelziffer den Rest der Zahl: sezet den Quotienten, als

eine neue Wurzelziffer, hinter die Scheidungslinie: multiplicirt den Divisoren mit dem erhaltenen Quotienten oder neuen Wurzelziffer, und ziehet das Product gewöhnlich ab; welche Division aber, wie es sich von selbsten verstehet, allezeit also geschehen muß, daß die jezt folgende Subtraction statt finden kan.

2) Subtrahirt man das Quadrat der erhaltenen neuen Wurzelziffer abermahl von dem Rest der Zahl.

Wobei wohl zu merken ist, daß bei allen jeztgemeldten Operationen die Ziffern nach ihrem völligen Wehrt, welchen sie nach ihren Stellen erhalten, betrachtet und angenommen werden müssen, zu welchem Ende sothaner Wehrt mit Pünctlein zu bemerken ist.

Wie nun bei Ausziehung der zweiten Wurzelziffer jeztgemeldter Massen verfahren wird, also und auf eben die Art wird eine jede der noch folgenden Wurzelziffern gefunden.

§. 162. Demnächst hat man noch zu wissen, daß eine jede Quadratzahl nach ihren Gliedern benennet wird, als: wann sie, wie in dem Wurzeltäfelein, aus einem Glied, folglichen auch aus einer Wurzelziffer bestehet, heisset sie eine **monomische**, wann sie aus zwei Gliedern, und also aus zwei Wurzelziffern bestehet, eine **binomische** u. s. f. aus drei Gliedern, eine **trinomische**, **quadrinomische** u. s. w. überhaupt aber wird dieselbige, wann sie mehr als ein Glied hat, eine **polinomische Quadratzahl** genennet.

§. 163. Es folget also erstlich, wie eine **binomische Quadratzahl** eigentlich entstehe, und wie aus derselben die Wurzel hinwiederum gezogen werde (§. 158).

z. E. Es sei die Zahl 46 zu einer Quadratzahl zu erheben:

```
  46
  46
 ----
  36   Das Quadrat von der Eintenziffer 6
 240 }
 240 } Das doppelte Zwischenproduct: 6 × 40
1600   Das Quadrat von der Zehntenziffer 4, d. i. 40
 ----
2116   Das ganze Quadrat.
```

Die Ausziehung der Wurzel aus dieser Quadratzahl ist nun der ordentliche Rükweeg, und geschiehet nach denen §. 161 gegebenen Regeln also:

```
                                  21,16|46 Quadratwurzel.
                                  16 . . Die im Wurzeltäfelein
                                  -----  gefundene Quadratzahl,
1) Das Duplum von 40, .      80) 5 16   welche hier 1600 ist.
                                 4 80
                                 ----
                                   36
2) Das Quadrat von 6 . . .       — 36
                                 ----
                                    0
```

Hier wurde nach §. 160 mit dem ersten Glied 21 ins Wurzeltäfelein gegangen, um daselbst diejenige Quadratzahl aufzusuchen, welche diesem ersten Glied am nächsten sei, und sich von ihm subtrahiren lasse, welche dann 16 war; denn obgleich 25 noch näher ist, als 16, so kan doch dieselbe von 21 nicht subtrahiret werden.

Zur Uebung.

Ein Plaz hält 1296 Ruthen, wie lang oder breit ist derselbe? Antw. 36 Ruthen.

Mit 1444 gleich vierekigten Platten sol ein gleich vierekigter Plaz beleget werden, wie viel kommen auf eine Seite? Antw. 38 Platten.

Ein gleich vierekigter Lustwald solte aus 1764 Stämmen bestehen, die in gleicher Weite voneinander gesezet werden solten, wie viel musten auf eine Seite kommen? Antw. 42.

Als

Als einer um sein Alter gefragt wurde, antwortete er: Wann die Zahl meiner Jahren mit ihr selbst multipliciret, d. i. quadriret wird, kommen 3136. Fr. Wie alt war derselbe? Antw. 56 Jahr.

In einem Verschlag befande sich für 56 fl. 4 kr. Waar, davon jedes ℔ so viel kr. kostete, als der ℔ waren. Wie viel sind es ℔ gewesen? Antw. 58 ℔.

Eine Compagnie Soldaten bekam von einer Beute 409 Thlr. 54 kr. und zwar jeder so viele Batzen, als ihrer waren. Fr. Wie stark war die Compagnie? Antw. 96 Mann.

§. 164. **Eine trinomische Quadratzahl** ist, wie gedacht (§. 162), diejenige, welche bei der Abtheilung (§. 161) drei Glieder erhält, und also auch drei Wurzelziffern erhalten muß, deren Entstehung also ist:

Z. E. Es sei die Zahl 365 zu einer Quadratzahl zu erheben:

365	
365	
25	Das Quadrat von 5
1800	Erstes doppeltes Zwischenproduct: 5×360
1800	
3600	Das Quadrat von 60
18000	Zweites doppeltes Zwischenproduct: 60×300
18000	
90000	Das Quadrat von 300
133225	Das ganze Quadrat.

Die Ausziehung der Wurzel aus dieser Quadratzahl geschiehet nun eben wie vorhin, nur daß die Operation, um die dritte Wurzelziffer zu erhalten, noch einmahl wiederholet wird:

	13, 32, 25 | 365 Quadratwurzel.	
	9	Die im Wurzeltäfelein gefundene Quadratz.
1) Das Duplum von 300.	600) 4 32 25	
	3 60 00	
	72 25	
2) Das Quadrat von 60.	— 36 00	
1) Das Duplum von 360.	720) 36 25	
	36 00	
	25	
2) Das Quadrat von 5.	— 25	
	0	

Hier wurde mit dem ersten Glied 13 ins Wurzeltäfelein gegangen, und befunden, daß das Quadrat 9 demselben am nähesten sei, welches sich von ihm subtrahiren lasse.

Auf diese Weise werden die Wurzeln aus allen polinomischen Quadratzahlen (§. 162) gezogen, und nur bei jeder folgenden Wurzel die zwo Regeln beobachtet.

§. 165. Gehet die Subtraction bei der ersten Wurzelziffer auf, und es folgen noch Ziffern oder Nullen, so bleibet man lediglich bei den Regeln der Division, vermög welcher in den Quotienten eine Nulle und noch Ziffern, oder lauter Nullen kommen.

Z. E.	36, 72, 36 | 606 Quadratwurzel.
	36 . . . .
1200)	72 36
	72 00
	36
	— 36
	0

Hätte man bei der Division mit 1200 zur zehnten Wurzelziffer 1 nehmen wollen, so wären 12000 zu subtrahiren gewesen, daher für dieselbige eine 0 gesezet und ferner durch die Division die Einteziffer gesuchet wurde.

Item:

Item: 49,00,00|700 Quadratwurzel.
49 . . . .

Da hier alles aufginge, so fande keine Operation mehr statt.

Item: 12,96,00|360
9 . . . .
600) 3 96 00
3 60 00
36 00
— 36 00

Hier ging bei der zweiten Wurzelziffer alles auf; weil aber noch die dritte Wurzelziffer (§. 161 e) fehlete, so muste diese Stelle mit einer 0 besezet werden.

Zur Uebung.

Welches ist die Quadratwurzel von 12996? Antw. 114.

Wann aus 14400 die Quadratwurzel gezogen wird, welches ist dieselbige? Antw. 120.

Es sollen 15625 Pflanzen ins Viereck gesezet werden, wie viel müssen auf eine Seite kommen? Antw. 125.

Eine schöne grosse Wiese von 163216 Geviertenschuhen wurde also verkauft, daß, wann man die Gulden der Kaufsumme mit ihnen selbst multipliciret, die Zahl so groß wird, als die Zahl der Schuhen ist. Fr. Wie ist solche verkauft worden? Antw. Um 404 fl.

Auf einer grossen Heide solte ein Geviertwald von 160000 Stämmen angeleget werden. Fr. Wie viel musten auf eine Reihe kommen? Antw. 400.

Als einer um sein jährlich Einkommen gefragt wurde, antwortete er: Wann man dasselbige, in Gulden genommen, mit ihm selbst multiplicirt, so kommen 225625. Fr. Wie groß war es? Antw. 475 fl.

§. 166.

§. 166. **Bleibet, wann das Quadrat der leztern Wurzelziffer subtrahirt wird, übrig,** so ist es ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl keine Quadratzahl sei, folglichen die Wurzel aus derselben ohnmöglich extrahirt werden könne, und heisset deswegen eine Irrationalgrösse oder surdische Zahl.

§. 167. **Um aber doch die Wurzel beiläuffig zu haben,** so werden einer solchen Zahl verschiedene Glieder von Nullen angehänget, deren drei schon genug sein können, wodurch man **Decimaltheile,** so inskünftige (§. 458) erkläret werden, erhält, aus welchen, wie vorhin, die Wurzel gezogen wird, wobei der Rest alsdann für nichts gehalten werden kan.

Z. E. **Die Quadratwurzel solte aus der Zahl 2346 gezogen werden:**

```
      23,46|48
      16 ..
    ----------
  80) 7 46
      6 40
    ----------
      1 06
      — 64
    ----------
        42
```

42 Ist der Rest, mithin ist die Zahl keine Quadratzahl, und muß, wie gedacht, zu Decimaltheilen gemacht und aus denselben die Wurzel gezogen werden, nicht aber aus dem Rest, wenn solcher zu Decimaltheilen resolviret worden, indem alsdann bei der anzustellenden Probe ein ganz ander Quadrat komt, als dasjenige ist, so aus der Wurzel erscheinen muß.

§. 168. Dieses begreiflich zu machen, so nehme man an, die vorstehende Zahlen 2346 wären Quadrat- oder Gevierteruthen, deren jede nach ihrer Länge oder einer Seite in 1000 Theile getheilet wäre, mithin die Gevierteruthe 1000 mahl 1000, das sind Milliontheile, enthielte, welche, wenn sie mit den 2346 Ruthen multipliciret werden, 2346000000 ausmachen, aus welchen nun die Quadratwurzel also gezogen werden muß:

```
        23,46,00,00,00|48435 Milliontheilgen ist die Wurzel,
        16 . . . . . . . .    oder eine Seite des Quadrats.
        ------------------
80000)   7 46 00 00 00
         6 40 00 00 00
        ------------------
         1 06 00 00 00
         — 64 00 00 00
        ------------------
96000)      42 00 00 00
            38 40 00 00
        ------------------
             3 60 00 00
             — 16 00 00
        ------------------
96800)       3 44 00 00
               2 90 40 00
        ------------------
                 53 60 00
                  — 9 00
        ------------------
96860)           53 51 00
                 48 43 00
        ------------------
                  5 08 00
                    — 25
        ------------------
                  5 07 75 Rest, welcher aber für nichts zu achten.
```

Probe.

```
          48435
          48435
        -------
         242175
        145305
       193740
      387480
     193740
          50775 Der Rest.
    -----------
    2346'000000 Die Milliontheilgen.
```

Wird nun die vorhin gekommene Wurzel in Millionentheilgen mit 1000, als dem Werth einer Ruthenlänge, reducirt, so kommen $48\frac{435}{1000}$ Ruthen zur Wurzel.

Wil man den Werth des Bruchs in Ruthen, Schuhen und Zollen bestimmen, so sagt man nach der Regel de Tri: 1000 Theile, als

als die Seite einer Ruthe, thun so viel Schuhe, als die Ruthe eingetheilet ist, z. E. 10 Schuhe, was thun sothane 435 Theile einer Ruthe?

1000 — 10 — 435
10

Schuhe: 4|350
10, wann der Schuh 10 Zoll sein sol.

Zoll: 3|$\frac{500}{1000}$, d. i. $\frac{1}{2}$

Also ist aus 2346 die Quadratwurzel beinahe: 48 Ruthen, 4 Schuhe, $3\frac{1}{2}$ Zoll.

Wil man nun wissen, wie groß dann vermög dieser beinahe gefundenen Quadratwurzel die eigentliche Quadratzahl, d. i. die Rationalzahl, sein müsse, so wird sothane Wurzel, wie bekant, mit ihr selbst multiplicirt, da dann der Unterschied dieser und jener Irrationalzahl deutlich erkant werden kan, welches durch die Regel de Tri also geschiehet:

Ruthe. Ruthen. Ruthen.
1 — $48\frac{435}{1000}$ — $48\frac{435}{1000}$

Antw. $2345\frac{949225}{1000000}$ Quadratzahl.

Ruthe. Ruthen. Schuhe. Zoll. Ruthen. Schuhe. Zoll.
Oder: 1 — 48 : 4 : $3\frac{1}{2}$ — 48 : 4 : $3\frac{1}{2}$

Antw. 2345 Ruthen, 9 Schuhe, $4\frac{369}{400}$ Zoll. Quadratzahl.

Diese Rationalgrösse von jener Irrationalgrösse subtrahirt:

Ruthen.	Schuhe.	Zoll.
2346 :	— :	—
2345 :	9 :	$4\frac{369}{400}$

$5\frac{31}{400}$ Zoll ist also der Unterschied, welcher in Ansehung so vieler Ruthen mit keinem mathematischen Instrument bemerket werden kan.

§. 169. Wann also 2346 Ruthen Plaz gegeben würden, um daraus ein Vierek zu formiren, und man nähme zu einer Seite obige gefundene Quadratwurzel, so würde man den Inhalt so genau haben, daß kein menschliches Auge den Mangel bemerken könte.

§. 170.

§. 170. **Es gehöret zwar das Ausziehen der Wurzel eigentlich zur Meßkunde**; es eräugnen sich aber auch noch viele andere Fälle, bei welchen eine Zahl gesuchet werden sol, die, wann sie mit sich selbst multipliciret werde, einer andern Zahl gleich sei, welches dann ebenfals nichts anders ist, als aus einer Zahl die Wurzel ziehen, wobei es sich aber von selbsten verstehet, daß bei untheilbaren Dingen keine Theile statt finden können, als z. E. in 2304 Thlr. können sich so viele Personen theilen, als eine Person Thlr. bekomt; bei der vorigen Zahl 2346 aber finden zwar $48\frac{435}{1000}$ Thlr. aber keine $48\frac{435}{1000}$ Personen statt.

§. 171. **Sol die Wurzel aus 1 gezogen werden**, so ist zwar 1 an und vor sich nur der Grund von einer auf- oder absteigenden Zahl oder Grösse (§. 53); sie kan aber hier nicht anders behandelt werden, als ein würkliches Quadrat, davon die Wurzel 1 sei (§. 53. 160), wie aus folgenden ab- oder aufsteigenden Wurzeln und Quadraten zu ersehen ist:

Wurzeln.	Quadraten.
5	25
4	16
3	9
2	4
1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$

§. 172. Aus 2, 3, 5 u. s. f. wird die Wurzel gezogen, wie §. 167 gezeiget worden.

§. 173. **Ist die Quadratwurzel aus einer gebrochenen Zahl zu ziehen**, deren Zähler und Nenner, wie vorhin, Quadratzahlen sind, so wird nur die Wurzel aus dem Zähler und Nenner genommen.

Z. E. aus $\frac{4}{9}$ ist die Wurzel $\frac{2}{3}$; denn wann $\frac{2}{3}$ mit sich selbst multipliciret werden, so komt das Quadrat $\frac{4}{9}$. Item aus $\frac{1}{4}$ ist die Wurzel $\frac{1}{2}$, aus $\frac{1}{9}$ ist sie $\frac{1}{3}$ u. s. w.

§. 174. Obzwar gebrochene Quadraten bei der practischen Meßkunde nicht statt finden, so eräugnen sich doch, wie oben gedacht (§. 170), sonsten viele Fälle, welche die Ausziehung der Wurzel aus einer solchen Zahl nöthig machen.

§. 175. Sind aber Zähler und Nenner keine Quadratzahlen, so müssen sie in Decimaltheile verwandelt werden, als worzu 10000 schon genug sein können.

Z. E. Was ist das für eine Zahl, wann solche mit ihr selbst multiplicirt wird, daß das Product $\frac{5}{8}$ sei?

$\frac{5}{8}$

8) $\frac{10000}{50000}$ |62,50| $\frac{79}{100}$ beinahe.
24

49 . .

140) 13 50

12 60

90

— 81

9 Der Rest, welcher für nichts zu achten.

Probe: $\frac{79}{100} \times \frac{79}{100} = \frac{6241}{10000}$. Zu dem Zähler den Rest 9 addirt, giebt: $\frac{6250}{10000}$ und reducirt, kommen: $\frac{5}{8}$

§. 176. Hat man eine vermischte Zahl (§. 125) vor sich, so wird solche erst zu einem Scheinbruch resolviret (§. 127), und alsdann wie vorhin verfahren.

Z. E. $2\frac{1}{4}$

$\frac{9}{4}$ Die Wurzel ist $\frac{3}{2}$, d. i. $1\frac{1}{2}$, denn $1\frac{1}{2}$ mit sich selbst multiplicirt, giebt: $2\frac{1}{4}$.

Item:

Item: Aus der §. 168 erhaltenen Quadratzahl zur Probe die Wurzel zu ziehen:

$2345\frac{949225}{1000000}$ Quadratzahl.

$\frac{2345949225}{1000000}$ Scheinbruch.

```
         2345949225 | 48435
         16........
80000)   745949225
         640000000
         105949225
        — 64000000
96000)    41949225
          38400000
           3549225
         —  160000
96800)     3389225
           2904000
            485225
           —   900
96860)      484325
            484300
                25
              — 25
                 0
```

Aus 1000000, als des Bruchs Nenner, ist die Wurzel 1000, mithin ist obige Wurzel $\frac{48435}{1000}$, diesen Scheinbruch reducirt, komt $48\frac{435}{1000}$, als die verlangte Wurzel.

§. 177. Ist aber die vermischte Zahl keine Quadratzahl, so muß nach der Resolution der Scheinbruch eben wie vorhin §. 175 behandelt werden.

```
Z. E.  3¾            15
      ----           10000
       15        4) 150000 | 3,75,00 | 193   Also ist die Wurzel bei-
      ----           32         1 . . . .     nahe: 193/100 red. 1 93/100
        4                  ---------
                      200) 2 75 00
                           1 80 00
                         ---------
                             95 00
                           — 81 00
                         ---------
                      380) 14 00
                           11 40
                         ---------
                            2 60
                           — 9
                         ---------
                            2 51 Rest.
```

II. Von Quadratgrössen und Ausziehung ihrer Wurzeln nach der Algebra mit Buchstaben.

§. 178. Wer incomplexe Grössen mit incomplexen Grössen multipliciren und dividiren kan (§. 77. 93), der kan auch eine jede Grösse zu einem Quadrat erheben, und wiederum aus demselben die Wurzel ziehen, welche Quadraten man reine Quadraten zu nennen pfleget.

Z. E.	a mit	a	multiplicirt,	giebt:	a^2
	x =	x	=	=	x^2
	b =	b	=	=	b^2
	bc =	bc	=	=	b^2c^2
	$3c$ =	$3c$	=	=	$9c^2$

Aus diesen Quadraten die Wurzeln zu ziehen, werden nur die Exponenten weggethan, aus den Coefficienten aber die Wurzeln gezogen.

§. 179. Ist aber eine Grösse nicht von solcher Beschaffenheit, daß die Wurzel aus ihr gezogen werden kan, so wird sie mit dem Zeichen: $\sqrt{}$, Wurzelzeichen genant, bemerket, damit entweder anzudeuten, daß aus derselben am Ende der Rechnung, d. i. bei der Resolution in gemeine Zahlen (§. 12), die Wurzel gezogen werden sol, oder daß nach §. 62. 68. 77. 103 sothane Formel die Wurzel würklich bedeute, in welchem Fall dieselbige, wie

hernach

hernach folget (§. 229), nach allen Rechnungsarten behandelt werden kan, und eine **Irrationalzahl** genennet wird.

Z. E. Die Quadratwurzeln solten gezogen werden

Aus a,	so müste die Bezeichnung sein:	$\sqrt{a}$
„ $3b$	„ „ „ „ „ „	$\sqrt{3b}$
„ $8c$	„ „ „ „ „ „	$\sqrt{8c}$
„ $abac$	„ „ „ „ „ „	$\sqrt{a^2bc}$
„ b^5	„ „ „ „ „ „	$\sqrt{b^5}$
„ 2	„ „ „ „ „ „	$\sqrt{2}$
„ $\frac{3}{4}$	„ „ „ „ „ „	$\sqrt{\frac{3}{4}}$

Nota. Bei höhern Potenzen ist nöthig, die Graden derselben, oder den Exponenten (§. 29), anzuzeigen, welches durch eine kleine Ziffer in oder neben dem Wurzelzeichen also geschiehet: $\sqrt{}^3$, $\sqrt{}^4$, u. s. f. das aber hier nicht nöthig ist, weil unter der Quadratwurzel keine andere Wurzel statt findet: dabei noch zu merken ist, daß bei der Algebra, wegen der Eigenschaften (§.178), alle einzelne Buchstaben irrational sind, ob sie gleich in gemeinen Zahlen würkliche Quadraten sein können, indeme $a=1, 4, 9$ u. s. f. sein kan (§.6).

§. 180. Gleichwie nun eine mit dem Wurzelzeichen bezeichnete Grösse die Wurzel aus sothaner Grösse vorstellet, und würklich bedeutet (§. 179), also wird natürlicher Weise eine Solche Formel wieder zu ihrer vorigen Grösse erhaben, wann das Zeichen von derselben weggethan wird.

§. 181. Hierbei ist zu merken, daß eine Quadratgrösse niemahlen anders, als positiv sein könne, indeme eine negative Wurzel mit ihr selbst multiplicirt sowohl ein positives Quadrat bringet, als wann sie positiv wäre (§.78), woraus folget, daß bei einer jeden Quadratgrösse eine negative und positive Wurzel statt finde.

* §. 182. Sol aus einer complexen Grösse (§.31) die Quadratwurzel gezogen werden, so müssen auch die gehörige Eigenschaften darzu vorhanden sein, da sie dann ein vollständiges oder zusammengeseztes Quadrat genennet wird.

§. 183. Bei dem gemeinen Ausziehen der Wurzel einer polinomischen Quadratzahl (§. 162) erkennet man aus den Gliedern derselben die Zahl der Wurzelziffern (§. 161 e);

 hier

hier aber muß man aus den besondern Eigenschaften einer Grösse die Glieder der Wurzel erkennen.

§. 184. Dieses geschiehet, wann man erweget, wie durch die Multiplication einer complexen Grösse mit ihr selbst eine Quadratgrösse entstehe.

Z. E. Es sei die Wurzel: $a + b$, oder: $x + b$, so entstehen ihre Quadraten also:

$$\begin{array}{lrrrr} & & & a & + b \\ & & & a & + b \\ \hline \text{Red.} & a^2 + ab & + & ab & + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab & & & + b^2 \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{lrrrr} & & & x & + b \\ & & & x & + b \\ \hline \text{Red.} & x^2 + bx & + & bx & + b^2 \\ \hline & x^2 + 2bx & & & + b^2 \end{array}$$

Hierbei erkennet man, daß, wann eine Grösse

1) aus drei Gliedern, wann sie reduciret sind, dann sonst müsten derselben vier sein, bestehet,
2) das erste und lezte Glied, oder wo sie stehen (§. 43), Quadraten sind, als wie hier a^2, b^2, oder: x^2, b^2, und
3) ein zweifaches Zwischenproduct hat, deren Factoren sich auf die Wurzeln der Quadraten beziehen, als: $2ab$, oder: $2xb$,

solches eine Quadratgrösse sei, deren Wurzel aus zwei Gliedern bestehe.

Item: **Die Wurzel sei:** $a + \frac{1}{2}c$

$$\begin{array}{lrrrr} & & & a & + \frac{1}{2}c \\ & & & a & + \frac{1}{2}c \\ \hline \text{Red.} & a^2 + \frac{1}{2}ac & + & \frac{1}{2}ac & + \frac{1}{4}c^2 \\ \hline & a^2 + & & ac & + \frac{1}{4}c^2 \end{array}$$

Da hier zwei Quadraten sind, als a^2 und $\frac{1}{4}c^2$, und das doppelte Zwischenproduct ac sich darauf beziehet, d.i. die beide Buchstaben der Quadraten hat, so enthält diese Grösse die Eigenschaften eines Quadrats, dabei die Coefficienten vor den Gliedern keine Veränderung machen.

Z. E.

$$\begin{array}{rrr} & \frac{1}{3}a & - \frac{1}{2}b \\ & \frac{1}{3}a & - \frac{1}{2}b \\ \hline & - \frac{1}{6}ab & + \frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{9}a^2 & - \frac{1}{6}ab & \\ \hline \frac{1}{9}a^2 & - \frac{1}{3}ab & + \frac{1}{4}bc \end{array}$$

§. 185. Hat die Grösse anstatt des zweiten Quadratglieds 1, so kan dasselbige nichts anders, als ein Quadrat von der Wurzel 1 sein (§. 171).

Z. E.

$$\begin{array}{r} b+1 \\ b+1 \\ \hline b+1 \\ b^2+b \\ \hline b^2+2b+1 \end{array}$$

§. 186. Auf solche Art kan man sich die Erhebung gemeiner Zahlen zu Quadraten (§. 163), wann sie nach ihren Einten und Decimalen behandelt werden, ganz deutlich und begreiflich machen.

Z. E. Es sei die Zahl 46 zum Quadrat zu erheben, so ist 40 das erste Glied, und 6 das andere Glied.

$$\begin{array}{r} 40+6 \\ 40+6 \\ \hline 240+36 \\ 1600+240 \\ \hline 1600+480+36 \end{array}$$

Oder: Die Zahl 91 oder 89 solte zum Quadrat erhoben werden, so wären im erstern Fall die Glieder: 90 + 1 und im andern Fall: 90 — 1 oder 80 + 9, mithin die Erhebung also:

$$\begin{array}{r} 90+1 \\ 90+1 \\ \hline 90+1 \\ 8100+90 \\ \hline 8100+180+1 \end{array} \quad \text{Item:} \begin{array}{r} 90-1 \\ 90-1 \\ \hline -90+1 \\ 8100-90 \\ \hline 8100-180+1 \end{array} \quad \text{Oder:} \begin{array}{r} 80+9 \\ 80+9 \\ \hline 720+81 \\ 6400+720 \\ \hline 6400+1440+81 \end{array}$$

Denn 8100 — 180 + 1 ist gleich 6400 + 1440 + 81

§. 187. Wie ein Bruch zu einem Quadrat erhaben werde, solches ist bei dem Multipliciren der Brüchen gezeiget worden (§. 148).

§. 188. Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer binomischen Quadratgrösse (§. 162) geschiehet nun nach eben den Regeln, welche bei dem gemeinen Aus-

ziehen (§. 161) gegeben worden, jedoch viel leichter, weil man hier mit keinen Einten, und also auch mit keinem Wurzeltäfelein (§. 160), zu thun hat; denn

1) Nimt man vom ersten Quadratglied die Wurzel, sezet solche, als das erste Wurzelglied, hinter die Scheidungslinie, multipliciret solche mit ihr selbst, d. i. quadriret dieselbige, und subtrahirt sie vom ersten Quadratglied, oder, welches einerlei, von der Quadratgrösse.

2) Nimt man dieses erste Glied der Wurzel doppelt, und dividirt damit das doppelte Zwischenproduct, um das zweite Wurzelglied zu erhalten, quadriret endlich

3) dieses gefundene zweite Wurzelglied, und subtrahirt es vom Rest.

Dabei vorauszusezen ist, daß, gleichwie die Glieder keiner gewissen Stellen bedürffen (§. 43), also auch hier die Glieder stehen können, wie sie wollen, wann sie nur nach den Eigenschaften (§. 184) ein Quadrat zusammen machen; doch sezet man gerne das gröste Quadratglied zuerst, und verfähret alsdann nach den gegebenen Regeln.

Z. E. Man hätte folgende Grösse vor sich, um die Quadratwurzel aus derselben zu ziehen: $-2ab + b^2 + a^2$, so sind dabei die Kennzeichen offenbar, und man kan sie also rangiren und die Wurzel extrahiren:

$$\begin{array}{l} b^2 - 2ab + a^2 \mid b - a \\ -b^2 \\ \hline 2b)\ -2ab + a^2 \\ \quad\ +2ab \\ \hline \qquad\qquad a^2 - a^2 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \mid a - b \\ -a^2 \\ \hline 2a)\ -2ab + b^2 \\ \quad\ +2ab - b^2 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Zur

Zur Probe können den Buchstaben hier, wie auch inskünftige, beliebige Zahlen zugeeignet und nach denselben die Wurzeln oder auch die Quadraten selbst in gemeine Zahlen resolviret werden, wodurch man den Begriffen von der Algebra immer näher kommen wird.

Z. E. Wann $a = 2$ und $b = 3$ genommen wird, so ist nach dem ersten Quadrat:

$$\begin{array}{rcr} b^2 & = & 9 \\ -2ab & = & -12 \\ \hline & & -3 \\ a^2 & = & 4 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

1 Das Quadrat, und auch die Wurzel; denn $b - a$ ist $= 1$

Nach dem zweiten Quadrat:

$$\begin{array}{rcr} a^2 & = & 4 \\ -2ab & = & -12 \\ \hline & & -8 \\ b^2 & = & 9 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

1 Das Quadrat, und die Wurzel ist -1; denn $a - b$ ist $= -1$

Hier hat sich bestätiget, was §. 171 und 181 gesaget worden.

Item: Aus $a^2 + ac + \frac{1}{4}c^2$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} a^2 + ac + \frac{1}{4}c^2 \mid a + \frac{1}{2}c \\ -a^2 \\ \hline 2a)\; ac + \frac{1}{4}c^2 \\ \quad -ac \\ \hline \quad \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}c^2 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

Item: Aus $b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2$ die Quadratwurzel zu extrahiren:

$$\begin{array}{l} b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 \mid b - \frac{1}{2}a \\ -b^2 \\ \hline 2b)\; -ab + \frac{1}{4}a^2 \\ \quad +ab \\ \hline \quad \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

Item: Aus $4a^2 - 4a + 1$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} 4a^2 - 4a + 1 \mid 2a - 1 \\ -4a^2 \\ \hline 4a) - 4a + 1 \\ \quad + 4a \\ \hline \qquad 1 - 1 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: Aus $b^2 + 6b + 9$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} b^2 + 6b + 9 \mid b + 3 \\ -b^2 \\ \hline 2b)\ 6b + 9 \\ \quad -6b \\ \hline \qquad 9 - 9 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: Aus $a^2 - a + \frac{1}{4}$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} a^2 - a + \frac{1}{4} \mid a - \frac{1}{2} \\ -a^2 \\ \hline 2a) - a + \frac{1}{4} \\ \quad + a \\ \hline \qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: Aus $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} \mid a + \frac{1}{4} \\ -a^2 \\ \hline 2a)\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} \\ \quad -\frac{1}{2}a \\ \hline \qquad \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: Aus $a^2c^2 + abc + \frac{1}{4}b^2$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} a^2c^2 + abc + \tfrac{1}{4}b^2 \mid ac + \tfrac{1}{2}b \\ -a^2c^2 \\ \hline 2ac)\ abc + \tfrac{1}{4}b^2 \\ \quad -abc \\ \hline \quad + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}b^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: Aus $a^2c^2 + abc^2 + \frac{1}{4}b^2c^2$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} a^2c^2 + abc^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2 \mid ac + \tfrac{1}{2}bc \\ -a^2c^2 \\ \hline 2ac)\ abc^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2 \\ \quad -abc^2 \\ \hline \quad \tfrac{1}{4}b^2c^2 - \tfrac{1}{4}b^2c^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: Die Wurzel aus einem Bruch zu ziehen, welcher durch Exponenten zu einem Quadrat erhoben ist, dürffen nur die Exponenten wieder weggethan werden, gleichwie solche bei dem Multipliciren hinzugethan worden (§. 148).

Z. E. $\frac{a^2}{b^2}$ giebt: $\frac{a}{b}$ Item: $\frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(b - 2)^2}$ giebt: $\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$

Item: Aus einem Scheinbruch (§. 134) die Wurzel zu ziehen, geschiehet bei dem Zähler und bei dem Nenner, und die Wurzel ist wieder ein Bruch.

Z. E. $\frac{b^2 - bd + \frac{1}{4}d^2}{\frac{1}{4}d^2}$ giebt: $\frac{b - \frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}d}$

Item: Aus einer ganzen Zahl und Brüchen die Wurzel zu ziehen:

$$\text{Z. E.}\quad a^2 - \frac{2ac}{d} + \frac{c^2}{d^2} \,\Big|\, a - \frac{c}{d}$$

$$\begin{array}{l} -a^2 \\ \hline 2a)\; -\frac{2ac}{d} + \frac{c^2}{d^2} \\ \quad\;\; + \frac{2ac}{d} \\ \hline \qquad\qquad \frac{c^2}{d^2} - \frac{c^2}{d^2} \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Die Probe hierauf geschiehet bekantlich, wann der Quotient, d. i. die Wurzel, mit ihr selbst multiplicirt wird.

$$\begin{array}{c} a - \frac{c}{d} \\ \hline \frac{ad - c}{d} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a - \frac{c}{d} \\ \hline \frac{ad - c}{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Zähler:} & ad - c \\ \text{Zähler:} & ad - c \\ \hline & -\; cad + c^2 \\ a^2d^2 - & cad \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\dfrac{a^2d^2 - 2cad + c^2}{d^2}} \end{array}$$

Das Quadrat, welches dem obigen Quadrat gleich sein muß;

Dann wann aus dem Zähler und Nenner dieses Scheinbruchs die Wurzel gezogen wird, so komt $\frac{ad - c}{d}$ zur Wurzel, und so diese nach §. 134 reducirt, oder, welches einerlei, nach §. 146 dividirt wird, so erhält man die Wurzel: $a - \frac{c}{d}$, wie oben.

Reducirt man aber den zum Quadrat erhaltenen Scheinbruch, oder dividirt denselben durch seinen Nenner (§. 146), so erhält man auch zur Probe die obige Quadratformel, als:

$d^2) \; a^2 d^2 - 2cad + c^2 \,\Big|\, a^2 \frac{-2cad + c^2}{d^2}$ red. $\frac{2ac}{d} + \frac{c^2}{d^2}$ (s. §. 135)

$$\begin{array}{l} a^2 d^2 - 2cad + c^2 \\ -a^2 d^2 \\ \hline \quad -2cad + c^2 \end{array}$$

Item: Aus folgender Grösse wird die Wurzel also gezogen:

$$\begin{array}{l} a^2 - 2a\frac{\frac{1}{2}b-2}{b-2} + \frac{(\frac{1}{2}b-2)^2}{(b-2)^2} \;\Big|\; a - 1\frac{\frac{1}{2}b-2}{b-2} \\ -a^2 \\ \hline 2a)\; -2a\frac{\frac{1}{2}b-2}{b-2} + \frac{(\frac{1}{2}b-2)^2}{(b-2)^2} \\ \quad +2a\frac{\frac{1}{2}b-2}{b-2} \\ \hline \qquad\qquad + \frac{(\frac{1}{2}b-2)^2}{(b-2)^2} \\ \qquad\qquad - \frac{(\frac{1}{2}b-2)^2}{(b-2)^2} \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Wurzel, deren Entstehung s. §. 148.

Nachdem das erste Wurzelglied a gefunden war (§. 188), so wurde mit dem Duplum desselben das zweite Quadratglied oder doppelte Zwischenproduct (§. 184. 147): $-2a\frac{\frac{1}{2}b-2}{b-2}$ dividirt, kam: $\frac{\frac{1}{2}b-2}{b-2}$; denn dieses ist ein Factor von $2a$ (§. 146), worauf dieses Wurzelglied quadrirt (§. 148) und gehörig subtrahirt wurde.

Item: **Die Wurzel aus einer gemeinen Zahl zu ziehen, wann sie in Decimalen vorgestellet worden** (§. 186):

$$\begin{array}{l} 1600 + 480 + 36 \,|\, 46 \\ -1600 \\ \hline 80)\; 480 + 36 \\ \quad -480 \\ \hline \qquad 36 \\ \qquad -36 \\ \hline \qquad 0 \end{array} \qquad \text{Item: } \begin{array}{l} 8100 + 180 + 1 \,|\, 91 \\ -8100 \\ \hline 180)\; 180 + 1 \\ \quad -180 \\ \hline \qquad 1 \\ \qquad -1 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item:

$$\begin{array}{l} \text{Item: } 8100 - 180 + 1 \,|\, 90 - 1 \\ \quad -8100 \qquad\qquad\qquad \text{d. i. } 89 \\ \hline 180)\ -180 + 1 \\ \quad\ +180 \\ \hline \qquad\qquad 1 \\ \qquad\quad -1 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{It. } 6400 + 1440 + 81 \,|\, 80 + 9 \\ \quad -6400 \\ \hline 160)\ 1440 + 81 \\ \quad\ -1440 \\ \hline \qquad\qquad 81 \\ \qquad\quad -81 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

§. 189. Nebst deme, daß, wann man die erhaltene Wurzel mit ihr selbst multiplicirt, die Quadratgrösse wieder kommen muß (§. 184), kan man die Probe auch mit gemeinen Zahlen anstellen.

Z. E. Wann bei vorstehender wunderlich aussehenden Quadratgrösse und deren Wurzel:

$$a^2 - 2a\,\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} + \frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(\,b - 2)^2} \,\Big|\, a - \frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$$

willkührlich (§. 12) genommen wird: $a = 6$ und $b = 8$, so ist die Resolution und Probe:

$a^2 = 36$, davon komt weg:

$-\ 4$; denn $2a$, d. i. 12 mit $\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$, d. i. $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$ multiplicirt (s. §. 146), bringt 4,

$\overline{32}$

sodann wieder darzu:

$+\frac{1}{9}$; denn $\frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(\,b - 2)^2}$ giebt: $\frac{1}{9}$

$\overline{32\frac{1}{9}}$

Also ist das Quadrat in gemeinen Zahlen $32\frac{1}{9}$, davon die Wurzel $\frac{17}{3}$ oder $5\frac{2}{3}$ ist (s. §. 176).

Daß nun obige Wurzel: $a - \frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$ in gemeinen Zahlen $5\frac{2}{3}$ sei, beweiset die Resolution:

a ist $= 6$, hiervon weggethan $\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$, d. i. $\frac{1}{3}$

$-\ \frac{1}{3}$

Bleibt: $5\frac{2}{3}$

§. 190.

§. 190. Hat aber eine complexe Grösse die §. 184 angezeigte Eigenschaften einer binomischen Quadratgrösse nicht, so kan auch die Wurzel aus derselben ohnmöglich gezogen werden, mithin wird dieselbige mit dem Wurzelzeichen bemerket, und man bekomt dadurch eine Irrationalzahl (§. 179).

Z. E. $\sqrt{a^2 - b}$

§. 191. Sol aus einer Grösse die Quadratwurzel gezogen werden, zu welcher noch etwas zu addiren oder zu subtrahiren ist, wie inskünftige bei denen Gleichungen oft vorkommen wird, und sonderlich die Resolution in gemeine Zahlen (§. 12) betrift, so muß dieselbige durch eine Klammer oder halben Cirkel von dem, was darzu oder davon kommen sol, abgesondert werden.

Z. E. Zu dem Quadrat: $a^2 + 2ab + b^2$ sol noch d addirt oder subtrahirt werden, so ist die Bezeichnung:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b)} + d \text{ oder: } \sqrt{a^2 + 2ab + b)} - d$$

§. 192. Die Eigenschaften einer Quadratgrösse, deren Wurzel drei Glieder hat, und daher eine trinomische Quadratgrösse genennet wird (§. 162), erkennet man, wann man weiß, wie durch die Multiplication einer Grösse von drei Gliedern mit ihr selbst sothane Quadratgrösse entstehe.

Z. E. Wann $a - b + c$ mit sich selbst multipliciret wird, so entstehet dadurch folgendergestalt eine Quadratgrösse:

$$\begin{array}{rl} & a - b + c \\ & a - b + c \\ \hline \text{Red. } & a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2 \\ \hline & a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2cb + c^2 \end{array}$$

Hierbei erkennet man, daß, wann eine Grösse

1) aus sechs Gliedern, wann sie reducirt sind, bestehet, dann sonst müsten derselben neun sein,

2) das

2) das erste, mittelste und lezte Glied, oder wo sie stehen (§. 188), Quadraten sind, als wie hier a^2, b^2, c^2, und

3) drei zweifache Zwischenproducten hat, welche sich in Ansehung der Buchstaben auf die Qudraten beziehen, als wie hier auf a^2 und b^2 das zweifache Product $2ab$, auf a^2 und c^2 das zweifache Product $2ac$ und auf b^2 und c^2 das zweifache Product $2cb$,

solches eine Quadratgrösse sei, deren Wurzel aus drei Gliedern bestehe.

Oder überhaupt:

Wann eine complexe Grösse drei Glieder enthält, die Quadraten sind, und drei zweifache Glieder, welche aus den ersten und zweiten, den ersten und dritten, und zweiten und dritten Buchstaben sothaner Quadratgrössen bestehen, so ist dieselbige eine trinomische Quadratgrösse, die Glieder mögen im übrigen stehen, wie sie wollen, als:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

§. 193. Auf solche Weise kan man sich die Erhebung gemeiner Zahlen zu Quadraten von drei Gliedern (§. 164), wann solche nach ihren Decimalen behandelt werden, ganz deutlich und begreiflich machen.

Z. E. Wann die Zahl 365 zu einer Quadratzahl erhaben werden sol, so ist das erste Glied 300, das Andere 60, und das dritte Glied 5.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 300 + & 60 + & 5 \\ & & 300 + & 60 + & 5 \\ \hline & & 1500 + & 300 + & 25 \\ & 18000 + & 3600 + & 300 & \\ 90000 + & 18000 + & 1500 & & \\ \hline 90000 - & 36000 + & 3600 + & 3000 + & 600 + 25 \end{array}$$

§. 194. Die Ausziehung der Wurzel einer solchen trinomischen Quadratgrösse geschiehet nun also:

1) Wird

1) Wird das erste und zweite Glied der Wurzel eben also ausgezogen, als wie das erste und zweite Glied aus einer binomischen Quadratgrösse (§. 188).

2) Dividirt man mit dem Duplum der zwei vorhandenen Wurzelgliedern den Rest, so komt das dritte Wurzelglied, und ziehet

3) das Quadrat des dritten Wurzelglieds vom abermahligen Rest ab.

Z.E. Aus $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ die Quadratwurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l}
a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \mid a + b + c \\
-a^2 \\
\hline
2a)\ 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
\quad -2ab \\
\hline
\qquad b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
\quad -b^2 \\
\hline
2a + 2b)\ 2ac + 2bc + c^2 \\
\qquad -2ac - 2bc \\
\hline
\qquad\qquad c^2 \\
\qquad\quad -c^2 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Item: $a^2 - 2ab - 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \mid a - b - c$

$$\begin{array}{l}
-a^2 \\
\hline
2a)\ 2ab - 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\
\quad -2ab \\
\hline
\qquad -2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\
\qquad\quad -b^2 \\
\hline
2a - 2b)\ -2ac + 2bc + c^2 \\
\qquad +2ac - 2bc \\
\hline
\qquad\qquad c^2 \\
\qquad\quad -c^2 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Item:

Item: $a^2 - 6ab + ac + 9b^2 + \frac{1}{4}c^2 + 3bc \mid a - 3b + \frac{1}{2}c$

$$\begin{array}{l}
a^2 - 6ab + ac + 9b^2 + \frac{1}{4}c^2 + 3bc \\
-a^2 \\
\hline
2a)\ -6ab + ac + 9b^2 + \frac{1}{4}c^2 + 3bc \\
+6ab \\
\hline
ac + 9b^2 + \frac{1}{4}c^2 + 3bc \\
-9b^2 \\
\hline
2a - 6b)\ ac + \frac{1}{4}c^2 + 3bc \\
-ac \qquad -3bc \\
\hline
\frac{1}{4}c^2 \\
-\frac{1}{4}c^2 \\
\hline
0
\end{array}$$

It. $x^2b^2 - 2axb + xb^2a + \frac{1}{4}b^2a^2 - ba^2 + a^2 \mid xb - a + \frac{1}{2}ba$

$$\begin{array}{l}
x^2b^2 - 2axb + xb^2a + \frac{1}{4}b^2a^2 - ba^2 + a^2 \\
-x^2b^2 \\
\hline
2xb)\ -2axb + xb^2a + \frac{1}{4}b^2a^2 - ba^2 + a^2 \\
+2axb \\
\hline
xb^2a + \frac{1}{4}b^2a^2 - ba^2 + a^2 \\
-a^2 \\
\hline
2xb - 2a)\ xb^2a + \frac{1}{4}b^2a^2 - ba^2 \\
-xb^2a \qquad +ba^2 \\
\hline
\frac{1}{4}b^2a^2 \\
-\frac{1}{4}b^2a^2 \\
\hline
0
\end{array}$$

Item: Aus einer trinomischen gemeinen Zahl, wann solche in Decimalen abgetheilet ist (§. 193), die Wurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l}
90000 + 36000 + 3600 + 3000 + 600 + 25 \mid 365 \\
-90000 \\
\hline
600)\ 36000 + 3600 + 3000 + 600 + 25 \\
-36000 \\
\hline
3600 + 3000 + 600 + 25 \\
-3600 \\
\hline
720)\ +3000 + 600 + 25 \\
-3600 \\
\hline
-600 + 600 + 25 \\
\hline
25 \\
-25 \\
\hline
0
\end{array}$$

Nota. Was §. 190 und 191 gesaget worden, solches gehöret auch hieher.

§. 195.

§. 195. Hat eine Grösse zwar einige, aber nicht alle Eigenschaften einer Quadratgrösse, welche §. 184 und 192 angezeiget worden, so kan solche, wie es inskünftige bei den quadratischen Gleichungen öfters die Nothwendigkeit erfordern wird, ergänzet und zu einem vollständigen Quadrat (§. 182) gemacht werden.

§. 196. Wann demnach eine Grösse nebst dem Quadratglied nur noch ein Glied enthält, es mag beschaffen sein, wie es wolle, so kan nach Masgab desselben das Quadrat ergänzet werden.

§. 197. Hierzu sind nur die bekante Regeln nöthig, nach welchen eine binomische Quadratwurzel ausgezogen werden muß (§. 188); dann erstlich nimt man das Glied, **welches nebst dem Quadratglied noch vorhanden ist, für das doppelte Zwischenproduct an, dividirt dasselbige mit der doppelten Wurzel des Quadratglieds, quadriret den Quotienten, und sezet das erhaltene Quadrat der Grösse bei.**

Z. E. $a^2 + a$ zu einem vollkommenen Quadrat zu machen:

$$\begin{array}{l} a^2 + a \mid a + \tfrac{1}{2} \\ -a^2 \\ \hline 2a)\ 1a \end{array}$$

dann mit der doppelten Wurzel a, d. i. $2a$, das Glied a oder $1a$ dividirt, giebt $\frac{1}{2}$, und dieses quadrirt, thut $\frac{1}{4}$, als das Supplement, mithin ist die ergänzte Grösse:

$$a^2 + a + \tfrac{1}{4}$$

§. 198. Daß dieses seine Richtigkeit habe, und solches eine Quadratgrösse sei, wird sowohl durch ordentliche Ausziehung der Wurzel, als auch mit beliebigen gemeinen Zahlen, bewiesen (§. 189), als:

$$
\begin{array}{l}
a^2 + a + \tfrac{1}{4} \mid a + \tfrac{1}{2} \text{ die Wurzel.} \\
-a^2 \\
\hline
2)\, a + \tfrac{1}{4} \\
-a \\
\hline
\tfrac{1}{4} \\
-\tfrac{1}{4} \\
\hline
0
\end{array}
$$

Oder: Es sei z. E. $a = 4$, so ist:

$$
\begin{array}{l}
a^2 = 16 \\
a = 4 \\
\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \\
\hline
20\tfrac{1}{4} \text{ Die Quadratgrösse.} \\
\hline
\tfrac{81}{4} \cdot \tfrac{9}{2}, \text{ d.i. } 4\tfrac{1}{2} \text{ die Wurzel (§. 176).}
\end{array}
$$

Item Nro. I. $a^2 - 2a$ zum Quadrat zu suppliren:

$$
\begin{array}{l}
a^2 - 2a \mid a - 1 \\
-a^2 \\
\hline
2a)\, -2a
\end{array}
$$

daher ist die Quadratgrösse: $a^2 - 2a + 1$; denn $2a$ in $-2a$ thut: -1, dieses quadrirt, macht: $+1$ (§. 181. 188).

Nro. II. Die Grösse: $c^2 - \frac{1}{3}c$ zu suppliren, giebt:

$$c^2 - \tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{36}$$

denn die doppelte Wurzel $2c$ in $-\frac{1}{3}c$ dividirt, macht $-\frac{1}{6}$, und das Quadrat hiervon ist: $\frac{1}{36}$

Nro. III. $a^2 + 4\frac{1}{2}a$ zu suppliren, bringt:

$$a^2 + 4\tfrac{1}{2}a + 5\tfrac{1}{16}$$

denn die doppelte Wurzel $2a$ in $4\frac{1}{2}$ dividirt, giebt $2\frac{1}{4}$, dieses quadrirt, thut: $5\frac{1}{16}$

Nro. IV. Die Grösse: $a^2 + ab$ zu suppliren, komt:

$$a^2 + ab + \tfrac{1}{4}b^2$$

denn ab mit $2a$ dividirt, giebt $\frac{1}{2}b$, dieses quadrirt, thut: $\frac{1}{4}b^2$

Nro. V.

Nro. V. $a^2 + 2ab$ supplirt, giebt: $a^2 + 2ab + b^2$

Nro. VI. $a^2 + 6ab$ " " " $a^2 + 6ab + 9b^2$

Nro. VII. $a^2 + 3\frac{1}{2}ab$ " " " $a^2 + 3\frac{1}{2}ab + 3\frac{1}{16}b^2$

Nro. VIII. $a^2 - 2a\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$ supplirt, bringt:

$$a^2 - 2a\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2} + \frac{(\frac{1}{2}b - 2)^2}{(b - 2)^2}$$

Die Procedur hievon s. §. 188.

Nro. IX. $a^2 - \frac{2ac}{d}$ supplirt, komt: $a^2 - \frac{2ac}{d} + \frac{c^2}{d^2}$

Davon s. ebenfals §. 188.

Nro. X. $4a^2 + 4ab$ zum Quadrat zu machen, komt:

$4a^2 + 4ab + b^2$

denn $2a$, als die Wurzel von $4a^2$, doppelt genommen, giebt $4a$, damit $4ab$ dividirt, giebt $1b$, davon das Quadrat b^2 ist.

Nro. XI. $4a^2 + 8ab$ supplirt, giebt: $4a^2 + 8ab + 4b^2$

Nro. XII. $4a^2 + 12ab$ " " " $4a^2 + 12ab + 9b^2$

Nro. XIII. $4a^2 + 2a$ " " " $4a^2 + 2a + \frac{1}{4}$

Nro. XIV. $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab$ " " " $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2$

denn von $\frac{1}{4}a^2$ ist die Wurzel $\frac{1}{2}a$, das Duplum davon ist $1a$, mit diesem $\frac{1}{3}ab$ dividirt, komt $\frac{1}{3}b$, davon das Quadrat $\frac{1}{9}b^2$ ist.

Nro. XV. $16a^2 + 400a$ supplirt, giebt:

$16a^2 + 400a + 2500$

Item: $4a^2 + 7a$ supplirt, giebt:

$4a^2 - 7a + \frac{49}{4}$, oder: $12\frac{1}{4}$

Nro. XVI. $a^2c^2 - acb$ zum Quadrat supplirt, komt:

$a^2c^2 - acb + \frac{1}{4}b^2$

denn die Wurzel von a^2c^2 ist ac, mit diesem Duplum, nemlich $2ac$, das doppelte Zwischenproduct: acb dividirt, giebt: $\frac{1}{2}b$, welches quadrirt $\frac{1}{4}b^2$ thut.

Item: Die Grösse: $a^2c^2 + ac^2b$ zu suppliren, giebt:

$a^2c^2 - ac^2b + \frac{1}{4}b^2c^2$

§. 199. Sind nebst dem Quadratglied noch verschiedene Glieder vorhanden, welche die Wurzel desselben enthalten (§. 197), im übrigen aber gleiche Buchstaben haben, die Coefficienten mögen beschaffen sein wie sie wollen, mithin reduciret werden können (§. 58), so kan man solche zusammen für ein Zwischenproduct annehmen und die Grösse zu einem vollkommenen Quadrat machen.

Z. E. Man hätte die Grösse vor sich:

$$4a^2 + 2abc + 3abc + abc$$

so ist solche reducirt:

$$4a^2 + 6abc$$

und wann sie supplirt wird:

$$4a^2 + 6abc + 2\tfrac{1}{4}b^2c^2$$

§. 200. Enthält eine Grösse, wie vorhin, ein Glied, so ein Quadrat ist, und noch zwei Glieder, die eben denselben Buchstaben, das ist, die Wurzel desselben haben, sie mögen sonst beschaffen sein, wie sie wollen, so können sothane beide Glieder für die beide doppelte Zwischenproducten angenommen, und die Grösse mittelst derselben zu einem vollkommenen trinomischen Quadrat gemacht werden (§. 192).

Z. E. Die Glieder der Grösse können sein:

$a^2 + ab + ac$, oder: $a^2 + 2ab + 2ac$ u. s. f.

§. 201. Hierzu sind, eben wie §. 197, nur die bekante Regeln nöthig, nach welchen eine trinomische Quadratwurzel ausgezogen werden muß (§. 192), denn wann man erstlich, wie vorhin, das zweite Quadratglied gefunden hat, so wird das dritte Quadratglied auf eben die Weise gesuchet, da dann die beiden Wurzeln der gefundenen Quadratglieder zum doppelten dritten Zwischenproduct gemacht werden.

Z. E. Die Grösse: $a^2 + 2ab + 2ac$ zum vollkommenen Quadrat zu machen:

$$a^2 + 2ab + 2ac \mid a + b^2 + c^2 + 2bc$$
$$-a^2$$
$$2a)\ 2ab + 2ac$$
$$-2ab$$
$$2a)\ 2ac$$
$$-2ac$$

Da hier mit der doppelten Wurzel von a^2, d. i. $2a$, das erste doppelte Zwischenproduct dividirt wurde, so kam b, welches quadrirt b^2 thate: das zweite doppelte Zwischenproduct abermahl mit der doppelten Wurzel dividirt, brachte c, welches quadrirt c^2 thate: wozu das doppelte Product der beiden Wurzeln von den gefundenen Quadraten, d. i. $2bc$ kame.

Werden nun diese drei Glieder zu der Grösse gethan, so hat man ein vollständiges trinomisches Quadrat, also:

$$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc$$

§. 202. Daß diese Ergänzung ihre Richtigkeit habe, kan, wie §. 198, sowohl durch die Ausziehung der Wurzel, als auch durch beliebige gemeine Zahlen, bewiesen werden als:

$$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc \mid a + b + c$$
$$-a^2$$
$$2a)\ 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc$$
$$-2ab$$
$$+2ac + b^2 + c^2 + 2bc$$
$$-b^2$$
$$2a + 2b)\ 2ac + c^2 + 2bc$$
$$-2ac \qquad -2bc$$
$$c^2 - c^2$$
$$0$$

Oder: Es sei $a = 4$, $b = 2$ und $c = 3$, so ist:

$$\begin{array}{r} a^2 = 16 \\ 2ab = 16 \\ 2ac = 24 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 9 \\ 2bc = 12 \\ \hline 81 \end{array}$$

81 Die Quadratzahl, davon 9 die Wurzel ist, denn a ist $= 4$

b „ $= 2$

c „ $= 3$

$\overline{\;9\;}$

Item Nro. I. $a^2 - 6ab + ac$ zu suppliren, bringt:

$$a^2 - 6ab + ac + 9b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + 3bc$$

denn $2a$ in $6ab$ giebt: $3b$, davon das Quadrat ist: $9b^2$; ferner: $2a$ in ac, giebt: $\frac{1}{2}c$, davon das Quadrat ist: $\frac{1}{4}c^2$, und das doppelte Product von den Wurzeln: $3b$ und $\frac{1}{2}c$ ist $3bc$; denn $3b$ mahl $\frac{1}{2}c$ ist $1\frac{1}{2}bc$, und dieses doppelt, macht $3bc$.

Nro. II. $a^2 + 6ab + 6ac$ wird supplirt:

$$a^2 + 6ab + 6ac + 9b^2 + 9c^2 + 18bc$$

denn $2a$ in $6ab$ giebt: $3b$, davon das Quadrat ist: $9b^2$; ferner: $2a$ in $6ac$, giebt: $3c$, davon das Quadrat ist: $9c^2$, und das doppelte Zwischenproduct von den beiden Wurzeln ist: $18bc$; denn $3b$ mahl $3c$ ist $9bc$, und dieses doppelt, thut $18bc$.

Nro. III. Die Grösse: $a^2 + 2a^2b + 2ab$ zum vollständigen Quadrat gemacht, komt:

$$a^2 + 2a^2b + 2ab + a^2b^2 + 2ab^2 + b^2$$

denn $2a$ in $2a^2b$ dividirt, giebt: ab, davon das Quadrat ist: a^2b^2; ferner: $2a$ in $2ab$ dividirt, giebt: b, davon das Quadrat ist: b^2, das doppelte Zwischenproduct der Wurzeln: ab und b ist $2ab^2$.

Nro. IV.

Nro. IV. Die Grösse sei: $4a^2 + 12a^2b + 4ab$, so ist das supplirte Quadrat:

$$4a^2 + 12a^2b + 4ab + 9a^2b^2 + b^2 + 6ab^2$$

denn die Wurzel von $4a^2$ ist: $2a$, diese doppelt, macht: $4a$. Mit $4a$ das doppelte Zwischenproduct: $12a^2b$ dividirt, bringt: $3ab$, davon das Quadrat ist: $9a^2b^2$. Ferner, mit $4a$ das doppelte Zwischenproduct: $4ab$ dividirt, bringt b, davon das Quadrat b^2 ist. Das doppelte Product der beiden Wurzeln: $3ab$ und b, thut: $6ab^2$.

§. 203. **Sind nebst dem Quadratglied noch mehr als zwei Glieder vorhanden, welche die Wurzeln sothanen Quadratglieds enthalten, und dieselben sind also beschaffen, daß sie zu zwei Gliedern reduciret werden können (§. 199), so kan man solche allezeit für zwei doppelte Zwischenproducten einer trinomischen Quadratgrösse annehmen, und alsdann, wie vorhin, die Grösse suppliren.**

Z. E. $\underline{4a^2 + 4ab + 2ab + 6ac + 2ac}$ ist reducirt: $\underline{4a^2 + 6ab + 8ac}$, und wird supplirt sein: $\underline{4a^2 + 6ab + 8ac + 2\frac{1}{4}b^2 + 4c^2 + 6bc}$, davon die Wurzel: $2a + 1\frac{1}{2}b + 2c$ ist.

§. 204. Kan man nun nach der bisherigen Anweisung nach Masgab eines vorhabenden Quadratglieds und doppelten Zwischenproducts (§. 196) das Quadrat ergänzen (§. 197 u. f.), so kan man auch nach Masgab eines zweiten Quadratglieds rükwärts ein beliebiges doppeltes Zwischenproduct, nebst dem ersten Quadratglied, finden, und dadurch eine Quadratgrösse formiren, wann man nur die Wurzel von gedachtem zweiten Quadratglied zum zweiten Wurzelglied des Quadrats nimt.

Z. E. Es sei das zweite Quadratglied einer Quadratgrösse b^2, so ist das eine Wurzelglied b, worzu das andere Wurzelglied nach Belieben genommen werden kan, es mag solches beschaffen sein, wie es wolle, wann es nur einen Buchstaben, z. E. a, b u. s. f. enthält, als:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \qquad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Item: Es sei das zweite Quadratglied $\frac{1}{36}$, so ist die Wurzel davon $\frac{1}{6}$, und die Formirung des Quadrats also:

$$\begin{array}{r} a + \frac{1}{6} \\ a + \frac{1}{6} \\ \hline \frac{1}{6}a + \frac{1}{36} \\ a^2 + \frac{1}{6}a \qquad \\ \hline a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{36} \end{array}$$

Item: Das zweite Quadratglied sei $9b^2$, so ist die Wurzel davon $3b$, und die Formirung des Quadrats also:

$$\begin{array}{r} a + 3b \\ a + 3b \\ \hline 3ab + 9b^2 \\ a^2 + 3ab \qquad \\ \hline a^2 + 6ab + 9b^2 \end{array}$$

Von

Von den

Cubicgrössen

und

Ausziehung ihrer Wurzeln.

§. 205.

Wann eine Grösse zweimahl mit ihr selbst multipliciret wird, so heisset das Product eine Cubicgrösse, und wann aus einer solchen Grösse diejenige Grösse gesuchet werden sol, durch welche sie entstanden ist, so heisset man solches: die **Cubicwurzel ausziehen.**

§. 206. Damit dieses bei den Buchstaben desto begreiflicher gemacht, auch hernach bei der Algebra nach Erfordernis der Resolution (§. 12) die Cubicwurzel ohne Anstand ausgezogen werden könne, so folget:

I. Von Cubicgrössen und Ausziehung ihrer Wurzeln nach gemeiner Art mit Ziffern.

§. 207. Sol aus einer Cubiczahl, welche aus einer, zwo oder drei Ziffern, mithin aus einem Glied bestehet, die Wurzel gezogen werden, so kan solches nicht so leicht, als wie bei der Quadratzahl (§. 160), durch das Ein mahl Eins geschehen, sondern man hat sich nachstehenden Cubicwurzeltäfeleins dabei zu bedienen:

Cubiczahlen:	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Die Wurzeln aus denselben:	1	2	3	4	5	6	7	8	9

§. 208. Bestehet aber die Zahl, aus welcher die Cubicwurzel gezogen werden sol, aus mehr als drei Ziffern, so sind überhaupt folgende Regeln dabei zu merken:

1) Wird die Zahl von der Rechten zur Linken zu drei und drei Ziffern in Glieder abgetheilet, es mag in das lezte eine, oder zwo oder drei Ziffern zu stehen kommen.

2) Suchet man in vorstehendem Wurzeltäfelein

a) die Cubiczahl, welche dem ersten Glied linker Hand am nächsten komt, und sich von demselben subtrahiren lässet:

b) sezet solche unter dasselbige, und bezeichnet ihren ganzen Wehrt, welchen sie nach der Stelle, auf der sie stehet, erhält, mit Nullen oder Pünctlein:

c) subtrahirt sie von der ganzen Grösse:

d) schreibet ihre Wurzel, welche in dem Wurzeltäfelein darunter stehet, wie bei der gemeinen Division den Quotienten, rechter Hand hinter eine Perpendicular- oder Scheidungslinie:

e) bezeichnet ihren Wehrt, d. i. sezet sothaner Wurzel so viele Pünctlein bei, als bei der Grösse noch Glieder übrig sind, indeme eben so viele Wurzelziffern noch folgen müssen,

so ist die erste Wurzelziffer gefunden.

Hierauf werden zur Ausziehung einer jeden der folgenden Wurzelziffern zwo Operationen angestellet, als:

1) Di-

1) Dividiret man mit dem dreifachen Quadrat der vorhandenen Wurzelziffer den Rest der Zahl: sezet den Quotienten, als eine neue Wurzelziffer, hinter die Scheidungslinie: multiplicirt den Divisoren mit dem erhaltenen Quotienten, oder neuen Wurzelziffer, und ziehet das Product gewöhnlich ab: welche Division aber, wie es sich von selbsten verstehet, allezeit also geschehen muß, daß die jezt folgende Subtraction statt finden kan.

2) Subtrahiret man:

a) das dreifache Quadrat dieser neuen Wurzelziffer, nachdem solches mit der vorstehenden Wurzelziffer multipliciret worden, und dann ferner

b) die cubirte neue Wurzelziffer.

Wie nun bei Ausziehung der zweiten Wurzelziffer jeztgemeldter Massen procediret wird, also wird eine jede der noch folgenden Wurzelziffern ausgezogen.

§. 209. Uebrigens wird eine Cubiczahl, eben wie eine Quadratzahl (§. 162), nach ihren Gliedern benennet, als: Eingliederige, monomische, Zweigliederige, binomische, Dreigliederige, trinomische Cubiczahlen u. s. f. überhaupt aber, wann sie aus mehr als einem Glied bestehet, eine polinomische Cubiczahl.

§. 210. **Es folget also erstlich, wie eine binomische Cubiczahl eigentlich entstehe, und wie aus derselben die Wurzel hinwiederum gezogen werde.**

3. E. **Es sei 24 die Cubicwurzel, so entstehet ihre Cubiczahl also:**

24
24
24

64 Cubus, welcher durch die Multiplication der drei Eintenziffern, als: 4 mahl 4 mahl 4 entstanden ist.

320 }
320 } Erstes dreifache Zwischenproduct, welches durch die
320 } Multiplication der drei Zehntenziffern mit den zwo Eintenziffern, nemlich mit 4 mahl 4, d. i. 16, entstanden ist, denn 16 mahl 20 ist 320.

1600 }
1600 } Zweites dreifache Zwischenproduct, welches durch
1600 } die Multiplication der drei Eintenziffern, nebst den zwo Zehntenziffern, nemlich mit 20 mahl 20, d. i. 400 entstanden ist, denn 4 mahl 20 mahl 20 ist 1600.

8000 Cubus, welcher durch die Multiplication der drei Zehntenziffern, als von 20 mahl 20 mahl 20 entstanden ist.

13824

welches mit Buchstaben leichter und begreiflicher vorgestellet werden kan.

Die Ausziehung der Wurzel aus dieser Cubiczahl ist nun der ordentliche Rükweeg, und geschiehet nach denen §. 208 gegebenen Regeln also:

		13,824	24
1) Das dreifache Quadrat der vorhandenen Wurzelziffer 2, d.i. 20 . .		8 . . .	Die im Wurzeltäfelein gefundene Cubiczahl.
	1200)	5 824	
2) Das dreifache Quadrat der neuen Wurzelziffer 4, mit der vorstehenden 2, d. i. 20 multiplicirt		4 800	
		1 024	
		— 960	
3) Der Cubus der neuen Wurzelziffer 4		64	
		— 64	
		0	

Zur

Zur Uebung.

Ein vierschichtiger Hauffe Quadratsteine soll 46656 Stük enthalten, wie viel müssen auf einer Reihe liegen? Antw. 36.

Ein grosser in cubischer Form liegender Hauffe Quadratsteine hält 157464 Stük, wie viel liegen auf einer Seite? Antw. 54.

Ein Maurer sol eine Regencisterne von gleicher Länge, Breite und Tieffe verfertigen, die 150 Ohm à 80 Maas halte; wann man nun auf einen Cubicschuh 12 Maas rechnet, so ist die Frage, wie lang, breit und tief dieselbige inwendig sein müsse? Antw. 10 Schuh lang, 10 Schuh breit, und 10 Schuh tief. NB. Wann die Ohm zu Maas resolviret sind, werden solche mit 12 dividirt, um die sämtliche Cubicschuhe zu erhalten, aus welchen alsdann die Wurzel gezogen wird.

Ein Zimmermann solte ein Gerüste von gleicher Länge, Breite und Höhe bauen, welches 144 fl., mithin der Cubicschuh 5 kr. kosten solte: Fr. Wie lang, breit und hoch hat solches werden sollen? Antw. 12 Schuh lang, breit und hoch. NB. Die sämtliche Kreuzer werden erst mit 5 dividirt.

§. 211. **Eine trinomische Cubiczahl** ist, wie gedacht (§. 209), diejenige, welche bei der Abtheilung drei Glieder bekomt, und also auch drei Wurzelziffern erhalten muß, deren Entstehung man aus der Multiplication der Einten- Zehnten- und Hundertenziffern nach dem Vorhergehenden weiß, mithin ohnnöthig ist, desfals Raum wegzunehmen.

Aus 14526784 die Cubicwurzel zu ziehen.

Die Auszziehung der Wurzel geschiehet eben, wie vorhin, nur daß die Operation, um die dritte Wurzelziffer zu erhalten, noch einmahl wirderholet wird.

1) Das

	14,526,784 | 244	
	8	
1) Das dreifache Quadrat der vorhandenen Wurzelziffer 2, d. i. 200	120000) 6 526 784	
	4 800 000	
2) Das dreif. Quadrat der neuen Wurzelz. 4, d. i. 40, mit der vorstehenden 2, d. i. 200 multipl.	1 726 784	
	— 960 000	
3) Der Cubus der neuen Wurzelziffer 4, d. i. 40	766 784	
	— 64 000	
1) Das dreif. Quadr. der vorhandenen Wurzelz. 24, d. i. 240 . .	172800) 702 784	Von hier wird nun die vorhergehende dreifache Operation wiederholet.
	691 200	
2) Das dreif. Quadr. der neuen Wurzelz. 4, mit den vorst. 24, d. i. 240 multiplicirt	11 584	
	— 11 520	
3) Die Cubiczahl der neuen Wurzelziffer 4	64	
	64	
	0	

Auf solche Art werden die Wurzeln aus allen polinomischen Cubiczahlen (§. 209) gezogen, und nur jederzeit die drei Regeln beobachtet.

§. 212. Was nun bei den Quadratzahlen §. 165 u. f. gesaget worden, das muß auch hier gemerket werden, wobei es sich in Ansehung der surdischen Zahlen (§. 166 u. f.) von selbsten verstehet, daß, gleichwie dorten bei den Quadratzahlen Glieder von zwo Nullen angehänget worden, hier Glieder von drei Nullen angehänget werden müssen, aus dem Grunde, weil hier eine Zahl zweimahl mit ihr selbst multipliciret, folglichen auch 1000 mit 1000 und das Product abermahl mit 1000 multipliciret werden muß.

II. Von Cubicgrössen und Ausziehung ihrer Wurzeln nach der Algebra mit Buchstaben.

§. 213. Wer incomplexe Grössen mit incomplexen Grössen multipliciren und dividiren kan (§. 77. 93), der kan auch eine jede Grösse zu einer Cubicgrösse erheben, und wiederum aus

aus derselben die Wurzel ziehen, welche Grössen man reine Cubicgrössen zu nennen pfleget.

Z. E.	a mit a und abermahl mit a multiplicirt, giebt:	a^3
	b = b = = = b = = = =	b^3
	bc in die dritte Potenz erhoben, giebt: = =	$b^3 c^3$
	$3c$ mit $3c$ und wieder mit $3c$ multiplicirt, giebt:	$27c^3$

Aus diesen Cubicgrössen die Wurzeln zu ziehen, werden die Exponenten nur weggethan, aus den Coefficienten aber die Wurzeln gezogen (§. 178).

§. 214. Ist aber eine Grösse nicht von der Beschaffenheit, die Cubicgrösse aus derselben ziehen zu können, und also irrational, so wird dieselbige, wie §. 179 bei den Quadratgrössen gezeiget worden, mit dem Wurzelzeichen bezeichnet, und zwar, damit man wisse, daß es die Cubicwurzel betreffe, solches mit 3 bemerket (§. 179).

Z. E. Die Cubicwurzel solte gezogen werden:

Aus	a,	so ist die Formel:	$\sqrt[3]{a}$
=	$3b$	= = = = =	$\sqrt[3]{3b}$
=	$8c$	= = = = =	$\sqrt[3]{8c}$
=	$abac$	= = = = =	$\sqrt[3]{a^2bc}$
=	b^4	= = = = =	$\sqrt[3]{b^4}$ u. s. f.

§. 215. Zuweilen wird auch eine gemeine Irrationalgrösse also bezeichnet (§. 179):

Z. E. $\sqrt[3]{2}$ Item: $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$

§. 216. Was §. 181 wegen der positiven Quadratgrösse angemerket worden, das findet hier bei Cubicgrössen keine statt, indeme allezeit eine negative Wurzel — und eine positive Wurzel + bringet.

§. 217. Sol aus einer complexen oder polinomischen Grösse (§. 209) die Cubicwurzel gezogen werden, so müssen auch die Eigenschaften darzu vorhanden sein (§. 182), da sie dann eine vollständige Cubicgrösse genennet wird.

§. 218. Bei dem gemeinen Ausziehen der Wurzel eines Polinomiums erkennet man aus den Gliedern einer Zahl die Glieder der Wurzel (§. 208 e), hier aber muß man aus den besondern Eigenschaften einer Grösse die Glieder oder Theile der Wurzel erkennen.

§. 219. Dieses geschiehet, wann man erweget, wie durch die Multiplication einer complexen Grösse mit ihr selbst eine Cubicgrösse entstehe.

Z. E. Es sei die Wurzel $a+b$, so entstehet ihre Cubicgrösse also:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab+ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^2b+ab^2+ab^2+b^3 \\ a^3+a^2b+a^2b+ab^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reduc. } a^3+a^2b+a^2b+a^2b+ab^2+ab^2+ab^2+b^3$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Hierbei erkennet man, daß, wann eine Grösse

1) aus vier Gliedern, wann sie reduciret sind, dann sonst müsten derselben acht sein, bestehet,
2) das erste und lezte Glied, oder wo sie stehen (§. 43), Cubicglieder sind, als wie hier: a^3, b^3, und
3) zwei dreifache Zwischenproducten, deren Factoren sich auf die Wurzeln der Cubicglieder beziehen,

solches eine Cubicgrösse sei, deren Wurzel aus zwei Gliedern bestehe.

Item: Die Wurzel sol sein: $a+\frac{1}{2}c$

$$\begin{array}{r} a+\frac{1}{2}c \\ a+\frac{1}{2}c \\ \hline \text{Red. } a^2+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{4}c^2 \\ \hline a^2+ac+\frac{1}{4}c^2 \\ a+\frac{1}{2}c \\ \hline \frac{1}{2}a^2c+\frac{1}{2}ac^2+\frac{1}{8}c^3 \\ a^3+a^2c+\frac{1}{4}ac^2 \\ \hline a^3+1\frac{1}{2}a^2c+\frac{3}{4}ac^2+\frac{1}{8}c^3 \end{array}$$

Item:

Item: Es sei die Wurzel: $b - \frac{1}{2}a$

$$\begin{array}{r} b - \frac{1}{2}a \\ b - \frac{1}{2}a \\ \hline -\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 \\ b^2 - \frac{1}{2}ab \qquad\quad \\ \hline b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 \\ b - \frac{1}{2}a \\ \hline -\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{8}a^3 \\ b^3 - ab^2 + \frac{1}{4}a^2b \qquad\quad \\ \hline b^3 - 1\frac{1}{2}ab^2 + \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{8}a^3 \end{array}$$

Item: Die Wurzel sei: $\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b \\ \hline -\frac{1}{6}ab + \frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{6}ab \qquad\quad \\ \hline \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b \\ \hline -\frac{1}{18}a^2b + \frac{1}{6}ab^2 - \frac{1}{8}b^3 \\ \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{9}a^2b + \frac{1}{12}ab^2 \qquad\quad \\ \hline \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3 \end{array}$$

Item: Es sei die Wurzel: $b + 1$ (s. §. 185).

$$\begin{array}{r} b + 1 \\ b + 1 \\ \hline b + 1 \\ b^2 + b \qquad \\ \hline b^2 + 2b + 1 \\ b + 1 \\ \hline b^2 + 2b + 1 \\ b^3 + 2b^2 + b \qquad \\ \hline b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \end{array}$$

Item: Die Wurzel sei: $2b + 2$

$$\begin{array}{r} 2b + 2 \\ 2b + 2 \\ \hline 4b + 4 \\ 4b^2 + 4b \\ \hline 4b^2 + 8b + 4 \\ 2b + 2 \\ \hline 8b^2 + 16b + 8 \\ 8b^3 + 16b^2 + 8b \\ \hline 8b^3 + 24b^2 + 24b + 8 \end{array}$$

Item: Die Wurzel sei: $\frac{1}{3} + a$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} + a \\ \frac{1}{3} + a \\ \hline \frac{1}{3}a + a^2 \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a \\ \hline \frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + a^2 \\ \frac{1}{3} + a \\ \hline \frac{1}{9}a + \frac{2}{3}a^2 + a^3 \\ \frac{1}{27} + \frac{2}{9}a + \frac{1}{3}a^2 \\ \hline \frac{1}{27} + \frac{1}{3}a + a^2 + a^3 \end{array}$$

§. 220. Auf solche Weise kan man sich die Erhebung gemeiner Zahlen zu Cubiczahlen (§. 210), wann sie nach ihren Einten und Decimalen vorgestellet werden (§. 186), ganz deutlich und begreiflich machen.

Z. E. Es solte die Zahl 24 zur Cubicgrösse erhaben werden, so wäre 20 das erste und 4 das andere Glied der Wurzel.

$$\begin{array}{r} 20 + 4 \\ 20 + 4 \\ \hline 80 + 16 \\ 400 + 80 \\ \hline 400 + 160 + 16 \\ 20 + 4 \\ \hline 1600 + 640 + 64 \\ 8000 + 3200 + 320 \\ \hline 8000 + 4800 + 960 + 64 \end{array}$$

§. 221. Einen Bruch zu cubiren oder zu dem dritten Grad zu erheben, ist bei dem Multipliciren der Brüche zu ersehen (§. 148).

§. 222. Die Ausziehung der Cubicwurzel einer binomischen Cubicgrösse geschiehet nun nach eben den Regeln, welche bei dem gemeinen Ausziehen (§. 210) gegeben worden, jedoch viel leichter, weil man hier kein Wurzeltäfelein (§. 207) nöthig hat, als:

1) Nimt man vom ersten Glied die Wurzel, sezet solche, als das erste Wurzelglied, hinter die Scheidungslinie, multipliciret solche dreimahl mit ihr selbst, d. i. cubiret dieselbige, und subtrahiret sie vom ersten Glied, oder, welches einerlei, von der Cubicgrösse.

2) Multipliciret man dieses erste Wurzelglied mit sich selbst, und das Product mit 3, so hat man ein dreifaches Quadrat, und dividirt damit, um das zweite Wurzelglied zu bekommen.

3) Multipliciret man das dreifache Quadrat des zweiten Wurzelgliedes mit dem vorstehenden Wurzelglied, und subtrahirt solches vom Rest der Grösse.

4) Cubiret man das zweite Wurzelglied, und subtrahirt den Cubus vom Rest.

Z. E. Aus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die Cubicwurzel zu ziehen:

	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a + b$
	$- a^3$
Dreifaches Quadrat von a .	$3a^2)\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$- 3a^2b$
	$3ab^2 + b^3$
Dreifaches Quadrat von b, mit a multiplicirt	$- 3ab^2$
	b^3
Cubus von b	b^3
	0

Item: Aus der Grösse: $a^3 + 1\frac{1}{2}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{8}c^3$ die Wurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} a^3 + 1\frac{1}{2}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{8}c^3 \mid a + \frac{1}{2}c \\ -a^3 \\ \hline 3a^2)\ 1\frac{1}{2}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{8}c^3 \\ \quad -1\frac{1}{2}a^2c \\ \hline \qquad \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{8}c^3 \\ \qquad -\frac{3}{4}ac^2 \\ \hline \qquad\quad \frac{1}{8}c^3 \\ \qquad\quad -\frac{1}{8}c^3 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Dann das dreifache Quadrat von a ist $3a^2$, das dreifache Quadrat von $\frac{1}{2}c$ mit a multiplicirt giebt $\frac{3}{4}ac^2$, und der Cubus von $\frac{1}{2}c$ ist $\frac{1}{8}c^3$, indeme $\frac{1}{2}$ zu dem zweiten Grad $\frac{1}{4}$ (§. 171), folglichen zu dem dritten Grad $\frac{1}{8}$ u. s. f. giebt.

Item: Aus $b^3 - 1\frac{1}{2}ab^2 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{8}a^3$ die Wurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} b^3 - 1\frac{1}{2}ab^2 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{8}a^3 \mid b - \frac{1}{2}a \\ -b^3 \\ \hline 3b^2)\ -1\frac{1}{2}ab^2 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{8}a^3 \\ \quad +1\frac{1}{2}ab^2 \\ \hline \qquad \frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{8}a^3 \\ \qquad -\frac{3}{4}a^2b \\ \hline \qquad\quad -\frac{1}{8}a^3 \\ \qquad\quad +\frac{1}{8}a^3 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Dieses Exempel ist in Ansehung der negativen Gliedern von dem vorhergehenden unterschieden, und muß dabei angemerket werden, daß von $-\frac{1}{2}a$ der Cubus $-\frac{1}{8}a^3$ gekommen (§. 216), folglichen muste die Subtraction, wie gewöhnlich, unter dem Zeichen + geschehen (§. 71).

Item: Die Grösse sei: $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3$, aus welcher die Wurzel gezogen werden sol:

$$\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3 \mid \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b$$
$$-\frac{1}{27}a^3$$
$$\frac{1}{3}a^2)\ -\frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3$$
$$+\frac{1}{6}a^2b$$
$$\frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}b^3$$
$$-\frac{1}{4}ab^2$$
$$-\frac{1}{8}b^3$$
$$+\frac{1}{8}b^3$$
$$0$$

Die Cubicwurzel von 27 ist 3 (§. 207), mithin von $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{3}$. Das Quadrat von $\frac{1}{3}a$ ist $\frac{1}{9}a^2$, und dieses dreifach, giebt $\frac{1}{3}a^2$. Das Quadrat von $-\frac{1}{2}b$ ist $+\frac{1}{4}b^2$, und dieses 3mahl, thut $\frac{3}{4}b^2$, welches mit $\frac{1}{3}a$ multiplicirt $\frac{1}{4}ab^2$ machet. Endlich ist die Cubiczahl von $-\frac{1}{2}b$, $-\frac{1}{8}b^3$, welche unter + subtrahirt wurde.

Item: Aus der Grösse: $b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ die Wurzel zu ziehen:

$$b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \mid b + 1$$
$$-b^3$$
$$3b^2)\ 3b^2 + 3b + 1$$
$$-3b^2$$
$$3b + 1$$
$$-3b$$
$$+1$$
$$-1$$
$$0$$

Item: Die Wurzel aus $8b^3 + 24b^2 + 24b + 8$ zu ziehen:

$$8b^3 + 24b^2 + 24b + 8 \mid 2b + 2$$
$$-8b^3$$
$$12b^2)\ 24b^2 + 24b + 8$$
$$-24b^2$$
$$24b + 8$$
$$-24b$$
$$8$$
$$-8$$
$$0$$

Item: Aus $\frac{1}{27} + \frac{1}{3}a + a^2 + a^3$ die Wurzel zu ziehen:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{27} + \frac{1}{3}a + a^2 + a^3 \mid \frac{1}{3} + a \\ -\frac{1}{27} \\ \hline \frac{1}{3})\ \frac{1}{3}a + a^2 + a^3 \\ -\frac{1}{3}a \\ \hline a^2 + a^3 \\ -a^2 \\ \hline a^3 \\ a^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Die Cubicwurzel von $\frac{1}{27}$ ist bekantlich $\frac{1}{3}$. Das Quadrat von $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{9}$, und solches 3mahl genommen, thut $\frac{1}{3}$. Das Quadrat von a ist a^2, solches dreifach, ist $3a^2$, dieses mit $\frac{1}{3}$ multiplicirt, macht $1a$ 2c.

Item: Die Ausziehung der Wurzeln aus gemeinen Zahlen, wann sie nach ihren Einten und Decimalen zu Cubiczahlen erhaben worden (§. 220):

$$\begin{array}{l} 8000 + 4800 + 960 + 64 \mid 24 \\ -8000 \\ \hline 1200)\ 4800 + 960 + 64 \\ -4800 \\ \hline 960 + 64 \\ -960 \\ \hline 64 - 64 \\ \hline 0 \end{array}$$

Item: Die Wurzel aus einem Cubicbruch zu ziehen, werden nur die Exponenten weggethan, gleichwie solche bei dem Multipliciren (§. 148) hinzugefüget worden.

Z. E. Von $\frac{a^3}{b^3}$ ist die Wurzel: $\frac{a}{b}$,

Item: Von $\frac{(\frac{1}{2}b - 2)^3}{(b - 2)^3}$ ist die Wurzel: $\frac{\frac{1}{2}b - 2}{b - 2}$

§. 223. Komt eine Grösse vor, aus welcher die Cubicwurzel gezogen werden sol, die drei Cubicglieder hat, so kan man schliessen, daß solches eine trinomische Cubicgrösse sei (§.211), d. i. deren Wurzel aus drei Gliedern bestehe, wobei folgendes zu merken ist: 1) Zie-

1) Ziehet man das erste und zweite Wurzelglied eben also aus, wie §. 222 gezeiget worden:
2) dividiret den Rest durch das dreifache Quadrat der beiden Wurzelgliedern, um das dritte Glied der Wurzel zu bekommen: subtrahirt alsdann
   a) das dreifache Quadrat desselben, mit dem zweiten und ersten Glied multiplicirt,
   b) das sechsfache Product der drei Wurzelgliedern, und
   c) den Cubus vom dritten Wurzelglied.

Z. E. Die Grösse sei:

$$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \mid a + b + c$$
$$-a^3$$

$$3a^2)\ 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$
$$-3a^2b$$

$$3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$
$$-3ab^2$$

$$3a^2c + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$
$$-b^3$$

3fach. Quadr. v. a u. b. $3a^2 + 3b^2)\ 3a^2c + 6abc + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$
$$-3a^2c \qquad -3b^2c$$

$$6abc + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$$
$-3ac^2 - 3bc^2$, d. i. $3c^2$ mit a und b multiplicirt.

$$6abc + c^3$$
$-6abc$ Das sechsfache Product von $a + b + c$

$$c^3 - c^3$$
$$0$$

§. 224. Wollen Anfängere hierüber eine Untersuchung mit gemeinen Zahlen anstellen (§. 188), so werden sie an der Allgemeinheit der Buchstaben (§. 12) nicht nur ein grösseres Vergnügen finden, sondern sich auch in Ansehung der Begriffe von denselben immer mehr üben, welches, wie schon bekant, geschehen kan, wann man denen Buchstaben beliebige Zahlen zueignet, und vermög derselben entweder die Wurzel zum dritten Grad erhöhet (§. 220), und aus eben demselben die Wurzel ziehet, oder die Glieder der Grösse addiret, und aus der Summe die Wurzel extrahirt.

Z. E. Es sei nach vorstehender Wurzel:

$a = 2$, das ist 200, weil die Wurzel drei Glieder hat, und 2 auf der driten Stelle stehet:

$b = 4$, das ist 40, weil 4 auf der zweiten Stelle stehet:

$c = 4$, das ist nur 4, weil solche auf der ersten oder Eintenstelle stehet.

folglichen hätte man 244 zur Wurzel, welche zweimahl mit ihr selbst multiplicirt, die Cubicgrösse brächte (§. 210).

Addiret man nach denen der Wurzel zugeeigneten Zahlen die Glieder der Grösse, so wird man die Zahl 14526784 zur Cubicgrösse erhalten.

Wil man aber die Glieder nach ihren gemeinen angenommenen Zahlen nach der Algebra behandeln, so ist die Wurzel: $200 + 40 + 4$; diese zweimahl mit ihr selbst multiplicirt, bringt die Grösse in Gliedern nach ihren Decimalen, aus welcher die Wurzel eben wie vorhin extrahirt wird, als:

8000000 + 4800000 + 960000 + 480000 + 192000 + 64000 + 9600 + 19200 + 1920 + 64 | 200 + 40 + 4
−8000000

120000) 4800000 + 960000 + 480000 + 192000 + 64000 + 9600 + 19200 + 1920 + 64
−4800000

960000 + 480000 + 192000 + 64000 + 9600 + 19200 + 1920 + 64
−960000

480000 + 192000 + 64000 + 9600 + 19200 + 1920 + 64
−64000

120000 + 4800) 480000 + 192000 + 9600 + 19200 + 1920 + 64
−480000 −19200

192000 + 9600 + 1920 + 64
−9600 − 1920 Das sind die 3fache Quadr. von 4 mit 200 und 40 multiplicirt.

192000 + 64
−192000 Sechsfaches Product der 3 Wurzelglieder.

64 − 64

0

Nota. Bei dem Bezeichnen der Grössen erhalten gleiche Zahlen auch gleiche Buchstaben (§. 36); bei einer willkührlichen Resolution aber (§. 92) können ungleichen Buchstaben gleiche Zahlen zugeeignet werden, wie oben mit *b* und *c* geschehen, da für einen jeden die Zahl 4 genommen worden; jedoch mit dem Unterschied der Decimalbedeutung.

§. 225. Ist die Zahl, aus welcher die Cubicwurzel gezogen werden sol, keine Cubicgrösse, so muß man sich mit Vorsezung des Wurzelzeichens begnügen (§. 214), bis eine Resolution erfolget (§. 12).

§. 226. Die Ergänzung einer Cubicgrösse, wie solche bei den Quadratgrössen gezeiget worden (§. 195 u. f.), würde hier zu umständlich und doch von keinem Nuzen sein, dahero man dieselbige billig vorbeigehet.

227. Zu Ausziehung der Wurzeln aus höhern Potenzen ist hier weder der Ort, noch der Raum, mithin sollen nur die Bezeichnungen, Benennungen und Wurzeln folgender eingliederigen Grössen (§. 207) noch angezeiget werden, um sich derselbeu nöthigenfals bedienen zu können, als:

a^4 bedeutet eine Zahl, so entstanden, da ihre Wurzel dreimahl mit ihr selbst multipliciret, und also zur Potenz vom vierten Grad erhaben worden, und heisset: eine **biquadratische**, oder **quadrato-quadratische** Zahl, mithin auch entstehet, wann eine Quadratzahl mit ihr selbst multipliciret wird.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrato-Quadratzahlen.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

a^5 ist eine Zahl, welche durch eine viermahlige Multiplication ihrer Wurzel mit ihr selbst entstanden, und daher zur Potenz vom fünften Grad erhaben worden, und eine **Quadrato-Cubiczahl** heisset, welche auch entstehet, wann eine Quadrat- und Cubiczahl von einer Wurzel miteinander multipliciret werden, oder wann man ein Quadrat mit sich selbst und das Product mit der Wurzel multipliciret.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrato-Cubiczahlen.	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

a^6 ist

a^6 ist eine durch fünfmahlige Multiplication entstandene, mithin zur Potenz vom sechsten Grad erwachsene Zahl, **Cubi-Cubiczahl** genant, mithin auch entstehet, wann eine Cubiczahl mit ihr selbst multipliciret wird.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi-Cubiczahlen.	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441

a^7 ist eine durch sechsmahlige Multiplication entstandene, mithin zur Potenz vom siebenden Grad erwachsene Zahl, **Quadrato-Quadrato-Cubiczahl** genant, welche auch entstehet, wann eine Quadratzahl mit ihr selbst und das Product mit einer Cubiczahl von eben der Wurzel multipliciret wird.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quad.-Quad.-Cubicz.	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

a^8 ist eine durch siebenmahlige Multiplication entstandene, mithin zur Potenz vom achten Grad erwachsene Zahl, **Quadrato-Cubi-Cubiczahl** genant, welche auch entstehet, wann eine Cubiczahl mit ihr selbst und das Product durch das Quadrat von eben der Wurzel multipliciret wird.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrato-Cubi-Cubiczahlen.	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721

a^9 ist eine durch achtmahlige Multiplication entstandene, mithin zur Potenz vom neunten Grad erwachsene Zahl, **Cubi-Cubi-Cubiczahl** genant, mithin auch entstehet, wann eine Cubiczahl zweimahl mit ihr selbst multipliciret wird.

W.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi-Cubi-Cubiczahlen.	1	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489

Von

Von den

Irrationalzahlen

und

der Rechnung mit denselben.

§. 228.

Wann die Wurzel aus einer gemeinen Zahl nicht genau ausgezogen werden kan, so sucht man zwar durch Decimaltheile so nahe darzu zu kommen, daß der Mangel nicht merklich sei (§. 166 u. f.); es bleibet aber sothane Wurzel dennoch immer unrichtig, und kan daher, in Ansehung der Rechnungsarten, ohnmöglich accurat behandelt werden.

§. 229. Bei der Algebra aber ist man im Stande, von einer jeden Grösse, welche kein Quadrat ist, die Wurzel nicht nur richtig auszudrücken, wie §. 179 angezeigt worden, sondern auch alle Rechnungsarten mit derselben auf das Alleraccurateste vorzunehmen.

§. 230. Es ist zwar eine algebraische Irrationalformel, z. E. $\sqrt{a}$, nicht allemahl irrational, indeme $a = 1$ oder $= 4$ u. s. f. sein könte (s. §. 6), sie ist es aber dennoch in Ansehung des Buchstabens, weil er nicht die Eigenschaft eines Quadrats hat (§. 178), mithin werden die Rechnungsarten mit dergleichen Formeln nur gehörig verrichtet, deren Ausschlag endlich die Resolution (§. 12) geben muß.

§. 231. Sollen Irrationalzahlen addiret oder subtrahiret werden, so geschiehet es lediglich nach §. 62

und §. 68, wann nur die Formel immer als eine einfache Grösse, und was derselben vorstehet und das Mehrfache anzeiget (§. 37), als ein Factor angesehen wird, dabei man sich, zur Deutlichkeit, den Coefficienten 1 allezeit einbilden muß (§. 38).

Z. E. $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ addiret, giebt: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
$\sqrt{2}$ ⸗ $\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ ⸗ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$\sqrt{b}$ ⸗ $\sqrt{b}$ ⸗ ⸗ ⸗ $\sqrt{b}+\sqrt{b}$, u. reduc. $2\sqrt{b}$ (§. 58)
$2\sqrt{3}$ ⸗ $\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ ⸗ $2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ , $3\sqrt{3}$
$3\sqrt{2}$ ⸗ $2\sqrt{2}$ ⸗ ⸗ ⸗ $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ ⸗ ⸗ $5\sqrt{2}$
$3\sqrt{1}$ ⸗ $2\sqrt{1}$ ⸗ ⸗ ⸗ $3\sqrt{1}+2\sqrt{1}$ ⸗ ⸗ 5 (s. §. 171).
und $\sqrt{b}$ von $\sqrt{a}$ subtr. bringt: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
$\sqrt{2}$ ⸗ $-\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ $-\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$-\sqrt{3}$ ⸗ $\sqrt{5}$ ⸗ ⸗ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ } s. §. 68 u. f.
$-\sqrt{5}$ ⸗ $-\sqrt{6}$ ⸗ ⸗ $-\sqrt{6}+\sqrt{5}$ }
$\sqrt{3}$ ⸗ $2\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ $2\sqrt{3}-\sqrt{3}$, reducirt (§. 60) $\sqrt{3}$
$2\sqrt{a}$ ⸗ $5\sqrt{a}$ ⸗ ⸗ $5\sqrt{a}-2\sqrt{a}$ ⸗ ⸗ $3\sqrt{a}$
$\sqrt{1}$ ⸗ 1 ⸗ ⸗ $\sqrt{1}-1$ d. i. 0 od. $1-\sqrt{1}$ ist auch 0

§. 232. **Sind gleiche Irrationalzahlen miteinander zu multipliciren, so ist die eine Zahl das Product, und wird rational, sie mag beschaffen sein wie sie wolle.**

$\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$ miteinander mult. giebt: a
$\sqrt{5}$ ⸗ $\sqrt{5}$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 5
$\sqrt{1}$ ⸗ $\sqrt{1}$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 1
$\sqrt{\frac{1}{3}}$ ⸗ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ $\frac{1}{3}$
$\sqrt{1\frac{1}{2}}$ d. i. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ⸗ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ $\frac{3}{2}$
$\sqrt{3}$ ⸗ $-\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ -3 } s. §. 78
$-\sqrt{3}$ ⸗ $-\sqrt{3}$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ 3 }

§. 233. Ob man zwar sothane Irrationalzahlen, oder Wurzeln, eigentlich nicht bestimmen kan, so beweiset doch ihre Multiplication, daß sie vorhanden sind; dann ist das **Product zwoer Wurzeln aus zwei gleichen Quadraten dem einen Quadrat gleich, so muß auch gegenwärtig das Product der zwo Wurzeln aus zwo gleichen Zahlen der einen Zahl gleich sein.**

Z. E.

Z. E. Die Wurzel aus 4, d. i. 2, mit abermahl der Wurzel aus 4 multiplicirt, giebt das Quadrat 4, folglichen muß z. E. die Wurzel aus 5 mit der Wurzel aus 5 multiplicirt das Product 5 bringen. Dabei anzumerken ist: daß, da die Buchstaben allgemeine Zahlzeichen sind, das Product z. E. von $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$, d. i. a, sowohl ein Quadrat als eine andere Zahl sein könne (§. 179): und daß es einerlei Wehrt bringe, die beide Wurzeln mögen positiv oder negativ genommen werden (s. §. 181).

§. 234. **Sind Irrational- und Rationalzahlen miteinander zu multipliciren**, so geschiehet es zwar nach den Regeln der Multiplication (§. 77 u. f.): es gilt aber hier nicht gleich, wie die Factoren stehen (§. 22), sondern der Rationalfactor muß allezeit vor das Wurzelzeichen gesezt werden.

Z. E. a mit $\sqrt{b}$, oder, welches einerlei,

$\sqrt{b}$	⸗	a	mult. giebt:	$a\sqrt{b}$	
$\sqrt{5}$	⸗	5	⸗ ⸗	$5\sqrt{5}$	
$\sqrt{3}$	⸗	-3	⸗ ⸗	$-3\sqrt{3}$	
$-\sqrt{3}$	⸗	-2	⸗ ⸗	$2\sqrt{3}$	
$\sqrt{1\frac{1}{2}}$, d. i. $\sqrt{\frac{3}{2}}$	⸗	2	⸗ ⸗	$2\sqrt{\frac{3}{2}}$,	oder ganz irrational $\sqrt{\frac{12}{2}}$ d. i. $\sqrt{6}$ (s. §. 239).
$\sqrt{\frac{1}{4}}$	⸗	4	⸗ ⸗	$4\sqrt{\frac{1}{4}}$,	oder ganz irrational $\sqrt{\frac{16}{4}}$, d. i. $\sqrt{4}$ oder 2.
$\sqrt{1}$	⸗	1	⸗ ⸗	$1\sqrt{1}$,	d. i. 1, dann die Wurzel aus 1 ist 1 (§. 171), und 1 mit 1 mult. giebt 1.
$\sqrt{1}$	⸗	-1	⸗ ⸗	$-1\sqrt{1}$,	d. i. -1, dann -1 mahl $+1$ giebt -1 (§. 78).
$-\sqrt{1}$	⸗	-1	⸗ ⸗	1,	dann -1 mahl -1 ist $+1$ (§. 78).
$-\sqrt{1}$	⸗	1	⸗ ⸗	$-1\sqrt{1}$,	d. i. wie vorhin -1.

Nota I. Wann also eine negative Wurzel mit einer positiven Rationalzahl multiplicirt werden sol, so darf man den Rationalfactoren z. E. nicht also vor das Zeichen sezen: $1 - \sqrt{1}$, weil dieses entweder eine Subtraction (§. 231), oder ein Binomium (§. 241) andeuten würde.

Nota II. Werden die Wurzeln $\sqrt{1}$ und $\sqrt{1}$ miteinander, oder, welches einerlei, die Wurzel $\sqrt{1}$ mit ihr selbst multi-

multiplicirt, so erhält man zur Quadratgrösse 1 (§.232): wird diese, wie vorhin, mit der Wurzel, nemlich $\sqrt{1}$, abermahl multiplicirt, so komt zur Cubicgrösse wieder 1 u. s. f. mithin ist 1 eine jede höhere Potenz 1, und ihre Wurzel auch 1, welches vors Zukünftige wohl zu merken ist; dann die Formel: $\sqrt{1}$ zeiget zwar die Wurzel aus 1 an, 1 aber ist eben so viel, und der Unterschied bestehet nur in den Formeln: $\sqrt{1}$ und 1, und in dem Gebrauch derselben.

§. 235. Hat man ungleiche Irrationalzahlen miteinander zu multipliciren, so wird deren Product unter das Wurzelzeichen gesezet, wobei es sich, wie vorhin, zutragen kan, daß das Product würklich ein Quadrat wird.

Z.E. $\sqrt{a}$ und	$\sqrt{b}$	miteinander multiplic. bringt:	$\sqrt{ab}$
$\sqrt{3}$ "	$\sqrt{5}$	" " " " "	$\sqrt{15}$
$\sqrt{1}$ "	$\sqrt{2}$	" " " " "	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$ "	$\sqrt{8}$	" " " " "	$\sqrt{16}$, d. i. 4
$-\sqrt{2}$ "	$\sqrt{3}$	" " " " "	$-\sqrt{6}$
$-\sqrt{2}$ "	$-\sqrt{3}$	" " " " "	$\sqrt{6}$
$\sqrt{\frac{1}{2}}$ "	$\sqrt{6}$	" " " " "	$\sqrt{3}$
$\sqrt{\frac{1}{2}}$ "	$\sqrt{1\frac{1}{2}}$, d.i. $\sqrt{\frac{3}{2}}$	" " " " "	$\sqrt{\frac{3}{4}}$

§. 236. Auch diese Multiplication hat ihre Richtigkeit; dann da das Product der Wurzeln aus zween Factoren eines Quadrats allezeit die Wurzel von sothanem Quadrat ist, also muß auch das Product der Wurzeln aus zween Factoren einer Zahl, sie mag beschaffen sein wie sie wolle, die Wurzel von der Zahl sein.

Z. E. Zween Factoren vom Quadrat 36 sind 4 und 9, und das Product derselben Wurzeln, nemlich 2 und 3, ist 6, als die Wurzel von 36: derohalben muß auch das Product der Wurzeln, z. E. aus den zween Factoren von 15, welche sind 3 und 5, so verstekt sie auch immer sind, die Wurzel aus 15 sein, welche die Formel hat: $\sqrt{15}$.

§. 237. Kan eine Irrationalzahl also in zween Factoren getheilet werden, daß der eine Factor eine

Qua-

Quadratzahl ist, so wird solche zum theil rational gemacht, wann man die Wurzel vor- und den Irrationalfactoren unter das Wurzelzeichen sezet.

Z. E. $\sqrt{b^2 a}$ giebt: $b\sqrt{a}$; dann die beide Factoren sind: $\sqrt{b^2}$ und $\sqrt{a}$, davon die Wurzel von b^2, d. i. b, vor das Wurzelzeichen kam.

$\sqrt{9a}$ giebt: $3\sqrt{a}$; dann die beiden Factoren sind: $\sqrt{9}$ und $\sqrt{a}$, davon die Wurzel 3 vor das Wurzelzeichen kam.

$\sqrt{20}$ giebt: $2\sqrt{5}$; dann die beide hierzu schikliche Factoren von 20 sind: $\sqrt{4}$ und $\sqrt{5}$, davon die Wurzel von 4, nemlich 2, unter das Wurzelzeichen kam.

§. 238. Sind zween Irrationalfactoren ein- oder anderseits multiplicirt, so wird das Product der Irrationalzahlen, wie vorhin §. 235, unter- und alsdann das Product der beiderseitigen Rationalzahlen [dabei man sich, wo keine befindlich ist, 1 einbilden muß (§. 231)], vor das Wurzelglied gesezet; daferne aber die Multiplication nach §. 232 eine Rationalzahl bringt, so erhält man eine Rationalzahl.

Z. E. $a\sqrt{b}$ mahl $\sqrt{a}$ macht: $a\sqrt{ab}$
$a\sqrt{b}$ - $b\sqrt{a}$ - $ab\sqrt{ab}$
$3\sqrt{5}$ - $\sqrt{3}$ - $3\sqrt{15}$
$3\sqrt{5}$ - $5\sqrt{3}$ - $15\sqrt{15}$
$3\sqrt{6}$ - $\sqrt{6}$ - 18; dann $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$, und diese mit 3 mahl 1 multiplicirt, thut: 18.
$3\sqrt{2}$ - $2\sqrt{2}$ - 12; dann $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, und diese mit 3 mahl 2 multiplicirt, macht: 12.
$2\sqrt{b}$ - $2\sqrt{b}$ - $4b$; dann $\sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$, und diese mit 2 mahl 2 multiplicirt, thut: $4b$.

§. 239. Sol ein Product von einem Rational- und Irrationalfactoren gleichnahmig resolviret oder ganz irrational gemacht werden, so ist es der Rükweeg von

von §. 237, indeme das Quadrat des Rationalfactoren mit dem Irrationalfactoren multiplicirt und das Product unter das Wurzelzeichen gesezet wird.

Z. E. $b\sqrt{a}$ giebt: $\sqrt{b^2 a}$
$3\sqrt{a}$ „ $\sqrt{9a}$
$2\sqrt{5}$ „ $\sqrt{20}$
$ba\sqrt{ba}$ „ $\sqrt{b^3 a^3}$; dann nachdem ba quadrirt und $b^2 a^2$ brachte, wurde mit ab multiplic.
$3\sqrt{15}$ „ $\sqrt{135}$
$2\sqrt{\frac{3}{2}}$ „ $\sqrt{\frac{12}{2}}$, oder: $\sqrt{6}$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ „ $\sqrt{\frac{3}{4}}$; dann $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}\times 3=\sqrt{\frac{3}{4}}$
$2\sqrt{\frac{3}{4}}$ „ $\sqrt{\frac{12}{4}}$, oder: $\sqrt{3}$
$2\sqrt{\frac{1}{2}}$ „ $\sqrt{\frac{4}{2}}$, „ $\sqrt{2}$

§. 240. **Das Dividiren ist bekantlich der Rükweeg vom Multipliciren,** und geschiehet, wann von einer Rationalgrösse die Wurzel, von einer multiplicirten Wurzel und von einem Wurzelproduct ein Factor zum Quotienten genommen, bei einem bestimten oder beliebigen Divisoren aber ein Bruch formiret wird.

Es folget also:

1) Da von einer Rationalgrösse die Wurzel (§. 179) zum Divisoren genommen wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 232 befindlich (s. §. 234 Not. II.).

$\sqrt{a})\,a\,|\,\sqrt{a}$; $-a$; 0 $\qquad$ $\sqrt{5})\,5\,|\,\sqrt{5}$; -5; 0 $\qquad$ $\sqrt{1})\,1\,|\,\sqrt{1}$; -1; 0 $\qquad$ $\sqrt{\tfrac{1}{3}})\,\tfrac{1}{3}\,|\,\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; $-\tfrac{1}{3}$; 0

$\sqrt{\tfrac{3}{2}})\,\tfrac{3}{2}\,|\,\sqrt{\tfrac{3}{2}}$; $-\tfrac{3}{2}$; 0 Da hier der Dividend $1\frac{1}{2}$ war, so wurde solcher einerleinahmig und zu einem Scheinbruch resolvirt, und $\frac{3}{2}$ erhalten.

$-\sqrt{3})\,-3\,|\,\sqrt{3}$; $+3$; 0 $\qquad$ $\sqrt{a})\,-a\,|\,-\sqrt{a}$; $+a$; 0 $\qquad$ $-\sqrt{3})\,3\,|\,-\sqrt{3}$; -3; 0

2) Da von einer multiplicirten Wurzel ein Factor zum Divisoren genommen wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 234 und 238 befindlich.

$a)\ a\sqrt{b}\,|\,\sqrt{b}$; $-a\sqrt{b}$; 0

$\sqrt{b})\ a\sqrt{b}\,|\,a$; $-a\sqrt{b}$; 0

$5)\ 5\sqrt{5}\,|\,\sqrt{5}$; $-5\sqrt{5}$; 0

$1)\ 1\sqrt{1}\,|\,\sqrt{1}$; $-1\sqrt{1}$; 0

$\sqrt{1})\ 1\sqrt{1}\,|\,1$; $-1\sqrt{1}$; 0

$\sqrt{a})\ a\sqrt{ab}\,|\,a\sqrt{b}$; $-a\sqrt{ab}$; 0

$\sqrt{b})\ a\sqrt{ab}\,|\,a\sqrt{a}$; $-a\sqrt{ab}$; 0

$a)\ a\sqrt{ab}\,|\,\sqrt{ab}$; $-a\sqrt{ab}$; 0

3) Da bei einem Wurzelproduct ein Factor der Wurzel zum Divisor genommen wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 235 befindlich.

$\sqrt{b})\ \sqrt{ab}\,|\,\sqrt{a}$; $-\sqrt{ab}$; 0

$\sqrt{a})\ \sqrt{ab}\,|\,\sqrt{b}$; $-\sqrt{ab}$; 0

$\sqrt{2})\ \sqrt{2}\,|\,\sqrt{1}$; $-\sqrt{2}$; 0

$\sqrt{3})\ \sqrt{15}\,|\,\sqrt{5}$; $-\sqrt{15}$; 0

$\sqrt{5})\ \sqrt{15}\,|\,\sqrt{3}$; $-\sqrt{15}$; 0

4) Da bei einem bestimten Divisoren ein Bruch formiret wird.

$\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ div. giebt: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, od. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\sqrt{10}$: $\sqrt{8}$: : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{8}}$: $\sqrt{\frac{10}{8}}$, od. $\sqrt{1\frac{1}{4}}$, od. $\sqrt{\frac{5}{4}}$, d. i. $1\frac{9}{16}$ (§. 173)

$\sqrt{2}$: $\sqrt{1}$: : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}$: $\sqrt{\frac{2}{1}}$, d. i. $\sqrt{2}$

Hieher gehöret nun ferner, wie die Rechnungen in Ansehung der sogenanten Binomien angestellet werden.

§. 241. Ein Binomium ist eine Grösse von zwei Gliedern, davon einem oder beiden das Quadratwurzelzeichen vorstehet.

Z. E. $7+\sqrt{5}$, $\sqrt{7}+\sqrt{5}$, $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, sind vier Binomien.

§. 242. **Das Addiren und Subtrahiren** sothaner Binomien geschiehet wie §. 231 der Irrationalzahlen.

Z.E.	$7+\sqrt{29}$	und	$7+\sqrt{29}$	giebt:	$14+2\sqrt{29}$	
	$7+\sqrt{29}$	„	$7-\sqrt{29}$	„	14; dan $+\sqrt{29}$ u. $-\sqrt{29}$	
	$7+\sqrt{29}$	„	$-7+\sqrt{29}$	„	$2\sqrt{29}$	gehen gegenein. auf.
	$1-\sqrt{1}$	„	$1+\sqrt{1}$	„	2; dann $-\sqrt{1}$ u. $+\sqrt{1}$	
Von	$3+3\sqrt{2}$	subtr.	$2+3\sqrt{2}$	bleibt:	1	gehen gegenein. auf.
„	$3-2\sqrt{2}$	„	$1-1\sqrt{2}$	„	$2-1\sqrt{2}$ (§. 71).	

§. 243. Zu dem **Multipliciren** sothaner Binomien und dem Rükweeg desselbigen, als dem Dividiren der Producten, geschiehet die Anleitung durch folgende Exempeln:

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 7+\sqrt{29} \\ \sqrt{29} \\ \hline 7\sqrt{29}+29 \end{array}\ \text{(s. §. 232. 234)} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 7+\sqrt{29} \\ 7 \\ \hline 49+7\sqrt{29} \end{array}$$

$$\text{c)}\ \begin{array}{r} -\sqrt{5}+\sqrt{8} \\ \sqrt{8} \\ \hline -\sqrt{40}+8 \end{array}\ \text{(s. §. 232. 235)} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{r} 7-\sqrt{29} \\ -7 \\ \hline -49+7\sqrt{29} \end{array}\ \text{(s. §. 78)}$$

$$\text{e)}\ \begin{array}{r} \sqrt{5}+\sqrt{a} \\ \sqrt{a} \\ \hline \sqrt{5a}+a \end{array}\ \text{(s. §. 232. 235)} \qquad \text{f)}\ \begin{array}{r} \sqrt{6}+\sqrt{a} \\ \sqrt{6} \\ \hline 6+\sqrt{6a} \end{array}$$

$$\text{g)}\ \begin{array}{r} \sqrt{3}+\sqrt{5} \\ \sqrt{2}+\sqrt{5} \\ \hline \sqrt{15}+5 \\ \sqrt{6}+\sqrt{10} \\ \hline \sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}+5 \end{array} \qquad \text{h)}\ \begin{array}{r} 7-\sqrt{29} \\ 7+\sqrt{29} \\ \hline 7\sqrt{29}-29\ \text{(s. §. 78)} \\ 49-7\sqrt{29} \\ \hline 49-29 \\ \hline 20 \end{array}$$

Diese erhaltene Producten werden nun mit einem derselben Factoren dividirt.

$$\text{a)}\ \sqrt{29})\ 7\sqrt{29}+29\ |\ 7+\sqrt{29} \qquad \text{b)}\ 7)\ 49+7\sqrt{29}\ |\ 7+\sqrt{29}$$

$$\begin{array}{r} -7\sqrt{29} \\ \hline \sqrt{29})\ 29 \\ -29 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -49 \\ \hline 7)\ 7\sqrt{29} \\ -7\sqrt{29} \\ \hline 0 \end{array}$$

c) $\sqrt{8}) -\sqrt{40}+8 \mid -\sqrt{5}+\sqrt{8}$
$+\sqrt{40}$
$\sqrt{8})\,8$
-8
0

d) $-7) -49+7\sqrt{29} \mid 7-\sqrt{29}$
$+49$
$-7) +7\sqrt{29}$
$-7\sqrt{29}$
0

e) $\sqrt{5}+\sqrt{a}) \sqrt{5a}+a \mid \sqrt{a}$
$-\sqrt{5a}-a$
0

f) $\sqrt{6}+\sqrt{a}) 6+\sqrt{6a} \mid \sqrt{6}$
$-6-\sqrt{6a}$
0

g) $\sqrt{2}+\sqrt{5}) \sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}+5 \mid \sqrt{3}+\sqrt{5}$
$-\sqrt{6} \quad -\sqrt{15}$
$\sqrt{2}+\sqrt{5}) \sqrt{10}+5$
$-\sqrt{10}-5$
0

h) $7-\sqrt{29}) 49-7\sqrt{29}+7\sqrt{29}-29 \mid 7+\sqrt{29}$
$-49+7\sqrt{29}$
$7-\sqrt{29}) 7\sqrt{29}-29$
$-7\sqrt{29}+29$
0

§. 244. Hat man eine Grösse von solcher Art vor sich, welche eine Irrationalzahl enthält, so kan dieselbige nicht nur eine binomische Quadratgrösse (§. 188), sondern auch eine solche Grösse sein, die nach §. 197 darzu supplirt werden kan.

§. 245. Die Eigenschaften einer Quadratgrösse sind nach §. 183 u. f. bekant, und müssen hier nur in Ansehung des Irrationalgliedes betrachtet werden, welches durch Entstehung des Quadrats (§. 184) am besten geschehen kan.

Z. E.

Z. E. Es sei die Wurzel: $a + \sqrt{b}$, so entstehet das Quadrat also:

$$\begin{array}{r} a + \sqrt{b} \\ a + \sqrt{b} \\ \hline a\sqrt{b} + b \\ a^2 + a\sqrt{b} \quad\; \\ \hline a^2 + 2a\sqrt{b} + b \end{array}$$

Hier erkennet man das Quadrat des ersten Gliedes, und das dritte Glied, in Ansehung der Wurzel, welche mit ihr selbst multiplicirt worden, als: $\sqrt{b} \times \sqrt{b}$ (§. 232), das doppelte Zwischenproduct: $2a\sqrt{b}$, ist ebenfals deutlich.

Die Ausziehung der Wurzel geschiehet nun nach denen bekanten Regeln (§. 188) also:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2a\sqrt{b} + b \mid a + \sqrt{b} \\ -a^2 \\ \hline 2a)\; 2a\sqrt{b} + b \\ \quad -2a\sqrt{b} \\ \hline \qquad\qquad\quad b \\ \qquad\qquad -b \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Item: $x^2 + 4x\sqrt{b} + 4b \mid x + 2\sqrt{b}$ (s. §. 238)

$$\begin{array}{l} -x \\ \hline 2x)\; 4x\sqrt{b} + 4b \\ \quad -4x\sqrt{b} \\ \hline \qquad\qquad\quad 4b \\ \qquad\qquad -4b \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Item: $4 + 4\sqrt{5} + 5 \mid 2 + \sqrt{5}$

$$\begin{array}{l} -4 \\ \hline 4)\; 4\sqrt{5} + 5 \\ \quad -4\sqrt{5} \\ \hline \qquad\qquad\quad 5 \\ \qquad\qquad -5 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Item: $16 + \sqrt{40} + 5 \mid 4 + \sqrt{5}$

$$\begin{array}{l} 16 + \sqrt{40} + 5 \\ -16 \\ \hline 8)\ \sqrt{40} + 5 \\ \quad -\sqrt{40} \\ \hline \qquad 5 \\ \quad -5 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: $a + 2\sqrt{ab} + b \mid \sqrt{a} + \sqrt{b}$; dann die Wurzel aus a ist $\sqrt{a}$ (§.179).

$$\begin{array}{l} a + 2\sqrt{ab} + b \\ -a \\ \hline 2\sqrt{a})\ 2\sqrt{ab} + b \\ \quad -2\sqrt{ab} \\ \hline \qquad b \\ \quad -b \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Item: $\frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \mid \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \hline \sqrt{6})\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \quad -\sqrt{3} \\ \hline \qquad \frac{1}{2} \\ \quad -\frac{1}{2} \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

dann das doppelte erste Wurzelglied $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ist $2\sqrt{\frac{3}{2}}$, und ganz irrational $\sqrt{\frac{12}{2}}$, d. i. $\sqrt{6}$ (s. §. 239).

Probe auf dieses Exempel:

$$\begin{array}{r} \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \hline \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \qquad \\ \hline \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{array}$$

Erstlich ist $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (§.232), alsdann $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ (§.235), diese noch einmahl, und endlich $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ (§.232), worauf das doppelte Zwischenproduct, ganz irrational gemacht (§.239), $\sqrt{3}$ brachte.

§. 246. Wann also bei einer gegebenen Quadratgrösse ein würkliches Quadrat (§. 178) und ein Wurzelglied vorhanden ist, so bestehet die Wurzel aus einem Rational- und Irrationalglied; enthält aber dieselbige anstatt des Quadratgliedes einen Buchstaben (§. 179), einen Bruch oder eine Irrationalzahl, so sind beide Glieder der Wurzel irrational.

§. 247. Gleichwie nun bei Rationalzahlen ein unvollständiges Quadrat ergänzet werden kan (§. 197), also kan es auch, wie gedacht (§. 244), hier bei Irrationalzahlen geschehen, wann nur die bisherige Rechnungsarten mit denselben (§. 231 u. f.) wohl gefasset worden.

§. 248. Zu dem Ende wird nach gedachtem 197sten §en das zweite Glied für das doppelte Zwischenproduct angenommen, mit der doppelten Wurzel des Quadratglieds dividirt, der erhaltene Quotient quadrirt, und das Quadrat der Grösse beigefüget.

Z. E. $1\frac{1}{2}$, d. i. $\frac{3}{2}$ und $\sqrt{2}$ solten zum vollständigen Quadrat supplirt werden.

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2} + \sqrt{2} \mid \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{2}{6}}, \text{ oder: } \sqrt{\tfrac{1}{3}}. \\ -\frac{3}{2} \\ \hline \sqrt{6})\sqrt{2} \end{array}$$

Nachdem die Wurzel von $\frac{3}{2}$ (§. 179) in den Quotienten gesezet und ihr Quadrat (§. 232) subtrahirt worden, so wurde das Duplum derselben, nemlich $2\sqrt{\frac{3}{2}}$, gleichnahmig resolvirt oder ganz irrational gemacht (§. 239), und reducirt, da dann $\sqrt{6}$ kam, mit welcher $\sqrt{2}$ dividirt und zum Quotienten $\sqrt{\frac{1}{3}}$ erhalten wurde.

Wird nun das erhaltene Wurzelglied, nemlich $\sqrt{\frac{1}{3}}$, quadrirt, oder mit sich selbst multiplicirt (§. 232), so komt $\frac{1}{3}$ zum Supplement, und die Quadratgrösse:

$$\frac{3}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

aus welcher die Wurzel also gezogen wird:

$$\begin{array}{rl}
 & \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{3} \mid \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{6}}, \text{ oder: } \sqrt{\frac{1}{3}}, \\
 & -\frac{3}{2} \qquad \text{welche quadrirt } \frac{1}{3} \text{ ist.} \\
2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}}, \text{ oder: } & \sqrt{6})\ \sqrt{2} + \frac{1}{3} \\
 & -\sqrt{2} \\
 & \frac{1}{3} \\
 & -\frac{1}{3} \\
 & 0
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r}
\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \\
\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \\
\hline
\sqrt{\frac{3}{6}} + \frac{1}{3} \\
\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{6}} \\
\hline
\frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \\
\hline
\frac{3}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{3}
\end{array}$$

das zweite Glied ganz irrational (§. 239) u. reducirt; dann $2 \times 2 = 4$ u. $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, d. i. $\sqrt{2}$.

§. 249. **Ist das erste und lezte Glied einer Grösse, bei welcher sich eine Irrationalzahl befindet, cubic,** so kan man schliessen, und nach §. 222 probiren, ob solches würklich eine Cubicgrösse sei.

z.E. $27 + 48\sqrt{21} + 189 \,|\, 3 + \sqrt{21}$; dann nach der Regel §. 208 a ist das erste Glied der Wurzel: 3.

$$
\begin{array}{rl}
 & 27 + 48\sqrt{21} + 189 \\
 & -27 \\
\hline
27) & 48\sqrt{21} + 189 \\
 & -27\sqrt{21} \\
\hline
 & 21\sqrt{21} + 189 \\
 & \phantom{21\sqrt{21}} - 189 \\
\hline
 & 21\sqrt{21} \\
 & -21\sqrt{21} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Das 3fache Quadrat von 3 dividirt also: 27 in $48\sqrt{21}$, bringt: $1\sqrt{21}$ u. s. f.

Das 3fache Quadrat von $\sqrt{21}$, d. i. 63 mit 3 multiplicirt, wird subtrahirt.

dann $\sqrt{21} \times \sqrt{21}$ giebt: 21, und diese abermahl mit $\sqrt{21}$ multipl. macht: $21\sqrt{21}$.

Probe:

$$
\begin{array}{r}
3 + \sqrt{21} \\
3 + \sqrt{21} \\
\hline
3\sqrt{21} + 21 \\
9 + 3\sqrt{21} \\
\hline
9 + 6\sqrt{21} + 21 \\
3 + \sqrt{21} \\
\hline
27 + 18\sqrt{21} + 63 + 9\sqrt{21} + 126 + 21\sqrt{21} \\
\hline
27 + 48\sqrt{21} + 189 \phantom{+ 126 + 21\sqrt{21}}
\end{array}
$$

dann $21 \times \sqrt{21} = 21\sqrt{21}$: $\sqrt{21}$ mahl $\sqrt{21}$ giebt 21, und 21×6 ist $= 126$ u. f. (f. §. 138).

Nota. Wie die Quadratwurzeln aus Binomien (§. 241) selbst zu ziehen sind, solches wird bei den Gleichungen gezeiget werden.

Von den ohnmöglichen oder eingebildeten Zahlen und der Rechnung mit denselben.

§. 250.

Da bei der Algebra Fragen vorkommen können, deren Auflösung solche Zahlen oder Grössen veranlassen und hervorbringen, welche ohnmöglich sind, so ist es nöthig, dergleichen Zahlen kennen zu lernen, um damit zu beweisen, daß in solchen Fällen auch würklich keine Beantwortung möglich sei.

§. 251. Wann demnach bei einer Auflösung z. E. die Formel vorkomt: $\sqrt{-a}$ oder $\sqrt{-3}$ u. s. f. so zeiget solche an, daß aus der negativen Grösse oder Zahl die Quadratwurzel gezogen werden sol, oder, daß diese Formel die Wurzel aus der negativen Grösse sei (§. 179), welches aber schlechterdings ohnmöglich ist, weil eine Quadratgrösse nicht anders als positiv sein kan (§. 181), mithin sothane Formeln ohnmögliche Grössen oder Zahlen sind.

§. 252. Nichts destoweniger kan man sich doch diese ohnmögliche Zahlen also einbilden und vorstellen, daß alle Rechnungsarten damit verrichtet werden können, und deswegen auch eingebildete Zahlen genennet werden.

§. 253. Sollen also eingebildete Zahlen addirt oder subtrahirt werden, so geschiehet es wie bei den Irrationalzahlen gezeiget worden, nur daß der Unterschied in den Formeln bestehet.

Z. E. $\sqrt{-a}$	und	$\sqrt{-b}$	addirt, giebt:	$\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$	
$\sqrt{-2}$	„	$\sqrt{-3}$	„ „	$\sqrt{-2}+\sqrt{-3}$	
$\sqrt{-b}$	„	$\sqrt{-b}$	„ „	$\sqrt{-b}+\sqrt{-b}$	red. $2\sqrt{-b}$
$2\sqrt{-3}$	„	$\sqrt{-3}$	„ „	$2\sqrt{-3}+\sqrt{-3}$	„ $3\sqrt{-3}$
$\frac{1}{2}\sqrt{-2}$	„	$\frac{1}{4}\sqrt{-2}$	„ „	$\frac{1}{2}\sqrt{-2}+\frac{1}{4}\sqrt{-2}$	„ $\frac{3}{4}\sqrt{-2}$
Und $\sqrt{-b}$	von	$\sqrt{-a}$	subtr. bringt:	$\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$	
$\sqrt{-2}$	„	$-\sqrt{-3}$	„ „	$-\sqrt{-3}-\sqrt{-2}$	
$-\sqrt{-3}$	„	$\sqrt{-5}$	„ „	$\sqrt{-5}+\sqrt{-3}$	} s. §. 68 u. f.
$-\sqrt{-5}$	„	$-\sqrt{-6}$	„ „	$-\sqrt{-6}+\sqrt{-5}$	}
$\sqrt{-3}$	„	$2\sqrt{-3}$	„ „	$2\sqrt{-3}-\sqrt{-3}$	red. $1\sqrt{-3}$
$2\sqrt{-a}$	„	$5\sqrt{-a}$	„ „	$5\sqrt{-a}-2\sqrt{-a}$	„ $3\sqrt{-a}$
$\sqrt{-1}$	„	1	„ „	$1-\sqrt{-1}$	
$-\sqrt{-1}$	„	1	„ „	$1+\sqrt{-1}$	

§. 254. Sind gleiche eingebildete Zahlen unter gleichen Zeichen + oder − miteinander zu multipliciren, so muß nach §. 233 die eine Zahl das Product oder Quadrat, und zwar negativ sein, die Zahlen mögen beschaffen sein wie sie wollen.

Z. E. $\sqrt{-a}$	und	$\sqrt{-a}$	mitein. mult. bringt:	$-a$	
$-\sqrt{-a}$	„	$-\sqrt{-a}$	„ „ „	$-a$;	dann die
$\sqrt{-3}$	„	$\sqrt{-3}$	„ „ „	-3	Wurzeln
$\sqrt{-1}$	„	$\sqrt{-1}$	„ „ „	-1	können +
$\sqrt{-1}$	„	$-\sqrt{-1}$	„ „ „	-1	und − ge-
$\sqrt{-1\frac{1}{2}}$ d. i. $\sqrt{-\frac{3}{2}}$	„	$\sqrt{-\frac{3}{2}}$	„ „ „	$-\frac{3}{2}$	nommen
					werden.

Sind die Wurzeln multiplicirt, so wird das Product derselben mit dem Product der Multiplicatoren oder Coefficienten multiplicirt.

$2\sqrt{-6}$	und	$\sqrt{-6}$	miteinander multipl. bringt:	-12
$\frac{1}{2}\sqrt{-20}$	„	$\frac{1}{5}\sqrt{-20}$	„ „ „ „	-2
$-\sqrt{-3}$	„	$2\sqrt{-3}$	„ „ „ „	6
$\sqrt{-3}$	„	$-2\sqrt{-3}$	„ „ „ „	6

Dann das Product der Coefficienten -1 und 2, oder -2 und 1, giebt: -2, und -2×-3 macht: 6 (§. 78).

§. 255. Diese Multiplication findet in der Einbildung vollkommen statt; dann gleichwie nach §. 233 das Product zwoer Wurzeln aus zwei gleichen Quadraten dem einen Quadrat gleich ist, also muß auch hier das Product zwoer Wurzeln aus zwei gleichen negativen Zahlen der einen negativen Zahl gleich sein, ob wir gleich die Beschaffenheit davon nicht einzusehen vermögen.

§. 256. Sind eingebildete und Rationalzahlen miteinander zu multipliciren, so geschiehet es wie §. 234, da der Rationalfactor nur vor das Wurzelzeichen gesezet wird.

$\sqrt{-b}$	und	a	miteinander multipl. giebt:	$a\sqrt{-b}$
$\sqrt{-5}$	„	5	„ „ „ „ „	$5\sqrt{-5}$
$\sqrt{-5}$	„	-5	„ „ „ „ „	$-5\sqrt{-5}$
$-\sqrt{-3}$	„	-3	„ „ „ „ „	$3\sqrt{-3}$
$\sqrt{-1}$	„	1	„ „ „ „ „	$1\sqrt{-1}$
$\sqrt{-1}$	„	-1	„ „ „ „ „	$-1\sqrt{-1}$, d. i. -1
$-\sqrt{-1}$	„	-1	„ „ „ „ „	$1\sqrt{-1}$
$-\sqrt{-1}$	„	1	„ „ „ „ „	$-1\sqrt{-1}$

Nota I. Man hat sich also auch hier, wie §. 234, zu hüten, daß der Rationalfactor, z. E. nicht also vor den negativen eingebildeten Factoren gesezt werde: $1 - \sqrt{-1}$, weil es entweder eine Subtraction (§. 253), oder ein eingebildetes Binomium, welches hernach folget, andeuten würde.

Nota II. Werden die eingebildeten Wurzeln $\sqrt{-1}$ und $\sqrt{-1}$ miteinander, oder, welches einerlei, die Wurzel $\sqrt{-1}$ mit ihr selbst multiplicirt, so erhält man die eingebildete Quadratgrösse -1 (§. 254): wird diese, wie jezt, mit der Wurzel $\sqrt{-1}$ multiplicirt, so komt: $-1\sqrt{-1}$ zur eingebildeten Cubicgrösse, welche reducirt wieder -1 ist: multipliciret man die eingebildete Cubicgrösse $-1\sqrt{-1}$ abermahl mit der Wurzel $\sqrt{-1}$, so ist gleichfals die eingebildete Biquadratgrösse $-1\sqrt{-1}$, folglichen -1 eine jede eingebildete höhere Potenz und ihre Wurzel auch -1, welches inskünftige wohl zu merken ist; dann die Formel $\sqrt{-1}$ zeiget zwar

die Wurzel aus — 1 an, — 1 aber ist eben so viel, und der Unterschied bestehet nur in den Formeln und in dem Gebrauch derselben (vergl. mit §. 234 Not. II.).

§. 257. Sind ungleiche eingebildete Zahlen miteinander zu multipliciren, so wird das Product rational unter das Wurzelzeichen gesezet, und daferne sie ein- oder beiderseits multiplicirt sind, komt das Product der Multiplicatoren, dann 1 ist auch ein Factor (§. 38), vor das Wurzelzeichen.

z.E. $\sqrt{-1}$ und	$\sqrt{-4}$	miteinander	multipl.	macht:		$\sqrt{4}$, d.i. 2
$\sqrt{-a}$	$-\sqrt{-b}$	-	-	-	-	$-\sqrt{ab}$
$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-5}$	-	-	-	-	$-\sqrt{15}$
$b\sqrt{-3}$	$\sqrt{-a}$	-	-	-	-	$b\sqrt{3a}$
$3\sqrt{-2}$	$a\sqrt{-3}$	-	-	-	-	$3a\sqrt{6}$
$\sqrt{-1}$	$\frac{3}{4}\sqrt{-2}$	-	-	-	-	$\frac{3}{4}\sqrt{2}$

§. 258. Auch diese Multiplication hat in der Einbildung ihre Richtigkeit; dann wann nach §. 236 das Product der Wurzeln aus zween Factoren einer Zahl die Wurzel von der Zahl ist, so muß auch hier z. E. das Product der Wurzeln aus — 3 und — 5, das ist: $\sqrt{-3}$ und $\sqrt{-5}$, gleich der Wurzel aus 15 sein, deren Formel $\sqrt{15}$ ist, wobei die Regel §. 78 gelten muß, daß nemlich die Wurzel aus — 3 mit der Wurzel aus — 5 multiplicirt, die Wurzel aus + 15 gebe.

§. 259. Hat man gleiche positive und negative eingebildete Zahlen miteinander zu multipliciren, so ist, wie §. 254, die eine Zahl das Product, und zwar positiv.

z.E. $-\sqrt{-3}$	und	$+\sqrt{-3}$	miteinander	multiplic.	macht:			3
$-\sqrt{-a}$	-	$+\sqrt{-a}$	-	-	-	-	-	a
$-\sqrt{-1}$	-	$+\sqrt{-1}$	-	-	-	-	-	1
$-\sqrt{-5}$	-	$+\sqrt{-5}$	-	-	-	-	-	5
$-\sqrt{-29}$	-	$+\sqrt{-29}$	-	-	-	-	-	29

Dann bildet man sich vor den Wurzeln den negativen und positiven Coefficienten 1 ein (§. 38), so ist das Product derselben — 1; wird das Product, z. E. — 3 (§. 254), damit multiplicirt so komt zum Product 3 (§. 78).

§. 260. Sind sothane positive und negative gleiche eingebildete Factoren ein⸗ oder beiderseits multiplicirt, so ist erstlich, wie oben, der eine Factor das Product, welches alsdann mit dem Product der Coefficienten, dabei der Coefficient 1 zu beobachten ist (§. 38), multiplicirt wird.

Z. E.	$2\sqrt{-3}$	mit	$-\sqrt{-3}$	multiplicirt,	giebt:		6
	$3\sqrt{-3}$	⸗	$-2\sqrt{-3}$	⸗	⸗	⸗	18
	$a\sqrt{-1}$	⸗	$-1\sqrt{-1}$	⸗	⸗	⸗	a
	$1\sqrt{-1}$	⸗	$-1\sqrt{-1}$	⸗	⸗	⸗	1

Dann gleichwie vorhin das Product, z. E. -3 mit dem Product der beiden Coefficienten -1 multiplicirt worden, also geschahe es hier auch, indeme $2 \times -1 = -2$ und -2 und -3 miteinander multiplicirt 6 gabe.

§. 261. **Ist nur ein Factor eine eingebildete Zahl,** so erhält man allezeit ein eingebildetes Product, und die Regeln der Multiplication (§. 78) werden gewöhnlich beobachtet.

Z. E.	$\sqrt{4}$	und	$\sqrt{-1}$	miteinand.	mult.	giebt:	$\sqrt{-4}$	oder:	$2\sqrt{-1}$
	$\sqrt{9}$	⸗	$\sqrt{-1}$	⸗	⸗	⸗	⸗	$\sqrt{-9}$	⸗	$3\sqrt{-1}$
	$\sqrt{1}$	⸗	$\sqrt{-1}$	⸗	⸗	⸗	⸗	$\sqrt{-1}$	⸗	$1\sqrt{-1}$
	$\sqrt{b}$	⸗	$\sqrt{-a}$	⸗	⸗	⸗	⸗	$\sqrt{-ab}$		

§. 262. Durch diese Multiplication kan man sich das Product, welches §. 254 aus zwei gleichen eingebildeten Zahlen entstanden, abermahl auf das Deutlichste vorstellen; dann gleichwie nach §. 257 **das Product der Wurzeln aus zween Factoren einer Zahl die Wurzel von der Zahl ist,** also ist hier $\sqrt{-4}$ die Wurzel von dem Quadrat -4: die Factoren aber dieser -4 sind 4 und -1, und die Wurzeln davon $\sqrt{4}$ und $\sqrt{-1}$, deren Product die Wurzel aus -4 ist, nemlich $\sqrt{-4}$.

§. 263. **Das Dividiren ist, wie bekant, der Rükweeg vom Multipliciren,** mithin können zur Uebung die vorhin erhaltene Producten, wie bei den Irrationalzahlen

§. 240

§. 240 geschehen, zu Dividenden genommen, und zu Divisoren von zwei Factoren nach Belieben einer erwählet werden.

Es folget also:

1) Da von einer negativen und positiven Rationalgrösse die Wurzel zum Divisoren genommen wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 254 befindlich ist (s. §. 256 Not. II.).

$\sqrt{-a})\ -a\ |\ \sqrt{-a}$; dann da das Product des Divisors und Quotienten nach §. 254 negativ, so wird solches unter + subtrahirt (§. 68).

$\quad +a$

$\quad 0$

$\sqrt{-1})\ -1\ |\ \sqrt{-1}$

$\quad +1$

$\quad 0$

It. $\sqrt{-3})\ 6\ |\ -2\sqrt{-3}$; dañ die Coefficienten 1 u. −2 machen −2, und −3 mahl −2 giebt 6.

$\quad -6$

$\quad 0$

2) Da von einer multiplicirten eingebildeten Wurzel ein Factor zum Divisoren genommen wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication (§. 256) befindlich.

$a)\ a\sqrt{-b}\ |\ \sqrt{-b}$

$\quad -a\sqrt{-b}$

$\quad 0$

Item: $5)\ 5\sqrt{-5}\ |\ \sqrt{-5}$

$\quad -5\sqrt{-5}$

$\quad 0$

$-5)\ -5\sqrt{-5}\ |\ \sqrt{-5}$

$\quad +5\sqrt{-5}$

$\quad 0$

Item: $-3)\ 3\sqrt{-3}\ |\ -\sqrt{-3}$

$\quad -3\sqrt{-3}$

$\quad 0$

$1)\ 1\sqrt{-1}\ |\ \sqrt{-1}$

$\quad -1\sqrt{-1}$

$\quad 0$

Item: $-1)\ -1\sqrt{-1}\ |\ \sqrt{-1}$

$\quad +1\sqrt{-1}$

$\quad 0$

3) Da eine Irrationalformel (§. 230) durch eine eingebildete Zahl dividirt wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 257 befindlich.

$\sqrt{-1})\sqrt{4}|\sqrt{-4}$ oder: $\sqrt{-4})\sqrt{4}|\sqrt{-1}$; dann weil $\sqrt{-1}$ mahl $\sqrt{-4}$ positiv wird, so wird das Product unter — subtrah.

$-\sqrt{4}$ $\quad$ $-\sqrt{4}$

0 $\quad$ 0

$\sqrt{-5})-\sqrt{15}|-\sqrt{-3}$ oder: $-\sqrt{-3})-\sqrt{15}|\sqrt{-5}$

$+\sqrt{15}$ $\quad$ $+\sqrt{15}$

0 $\quad$ 0

$\sqrt{-\tfrac{1}{4}})\sqrt{\tfrac{3}{4}}|\sqrt{-3}$ oder: $\sqrt{-3})\sqrt{\tfrac{3}{4}}|\sqrt{-\tfrac{1}{4}}$

$-\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ $\quad$ $-\sqrt{\tfrac{3}{4}}$

0 $\quad$ 0

$\sqrt{-a})b\sqrt{a3}|b\sqrt{-3}$ oder: $b\sqrt{-3})b\sqrt{a3}|\sqrt{-a}$

$-b\sqrt{a3}$ $\quad$ $-b\sqrt{a3}$

0 $\quad$ 0

$\tfrac{3}{4}\sqrt{-2})\tfrac{3}{4}\sqrt{2}|\sqrt{-1}$ oder: $\sqrt{-1})\tfrac{3}{4}\sqrt{2}|\tfrac{3}{4}\sqrt{-2}$ oder: $\dfrac{\tfrac{3}{4}\sqrt{2}}{\sqrt{-1}}$

$-\tfrac{3}{4}\sqrt{2}$ $\quad$ $-\tfrac{3}{4}\sqrt{2}$

0 $\quad$ 0

4) Da eine Rationalzahl durch eine eingebildete Zahl dividirt wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 259 befindlich.

$-\sqrt{-3})3|\sqrt{-3}$ oder: $\sqrt{-3})3|-\sqrt{-3}$; dann weil ungleiche Zeichen rational machen, so wird das Product unter — subtrahirt.

-3 $\quad$ -3

0 $\quad$ 0

$-\sqrt{-29})29|\sqrt{-29}$ oder: $\sqrt{-29})29|-\sqrt{-29}$

-29 $\quad$ -29

0 $\quad$ 0

5) Da

5) Da eine positive Grösse durch eine eingebildete Zahl dividirt wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 260 befindlich.

$$2\sqrt{-3})\ 6\ |\ -\sqrt{-3} \quad \text{oder:} \quad -\sqrt{-3})\ 6\ |\ 2\sqrt{-3}$$
$$\underline{-6} \qquad\qquad \underline{-6}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

$$a\sqrt{-1})\ a\ |\ -\sqrt{-1} \quad \text{oder:} \quad -\sqrt{-1})\ a\ |\ a\sqrt{-1}$$
$$\underline{-a} \qquad\qquad \underline{-a}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

$$1\sqrt{-1})\ 1\ |\ -\sqrt{-1} \quad \text{oder:} \quad -\sqrt{-1})\ 1\ |\ 1\sqrt{-1} \quad \text{od.} \quad \frac{1}{-\sqrt{-1}}$$
$$\underline{-1} \qquad\qquad \underline{-1}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

6) Da eine eingebildete Zahl durch eine Irrational- oder eingebildete Zahl dividirt wird, wovon der Rükweeg oder die Multiplication §. 261 befindlich.

$$\sqrt{4})\ \sqrt{-4}\ |\ \sqrt{-1} \quad \text{oder:} \quad \sqrt{-1})\ \sqrt{-4}\ |\ \sqrt{4}$$
$$\underline{-\sqrt{-4}} \qquad\qquad \underline{-\sqrt{-4}}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\sqrt{1})\ \sqrt{-1}\ |\ \sqrt{-1} \quad \text{oder:} \quad \sqrt{-1})\ \sqrt{-1}\ |\ \sqrt{1}$$
$$\underline{-\sqrt{-1}} \qquad\qquad \underline{-\sqrt{-1}}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\sqrt{b})\ \sqrt{-ab}\ |\ \sqrt{-a} \quad \text{oder:} \quad \sqrt{-a})\ \sqrt{-ab}\ |\ \sqrt{b} \quad \text{oder:} \quad \frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-a}}$$
$$\underline{-\sqrt{-ab}} \qquad\qquad \underline{-\sqrt{-ab}}$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

§. 264. **Von den Rechnungen, welche eingebildete Binomien betreffen** (§. 241).

1) Addirt werden:

$$\begin{array}{r} -5-\sqrt{-5} \\ -5-\sqrt{-5} \\ \hline -10-2\sqrt{-5} \end{array}$$

Item:

$$\begin{array}{r} -5-\sqrt{-5} \\ -5+\sqrt{-5} \\ \hline -10 \end{array}$$

Item:

$$\begin{array}{r} 1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} \\ \hline 2 \end{array}$$

2) Subtrahirt werden:

$$\begin{array}{r} 3+2\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \\ \hline 2+\sqrt{-1} \end{array}$$

3) Multiplicirt werden:

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{-29} \\ -\sqrt{-29} \\ \hline -7\sqrt{-29}+29 \end{array}$$

Diese Multiplicationen s. §. 259 und 256.

Item:

$$\begin{array}{r} 7-\sqrt{-29} \\ \sqrt{-29} \\ \hline 7\sqrt{-29}+29 \end{array}$$

Item:

$$\begin{array}{r} -7+\sqrt{-29} \\ -\sqrt{-29} \\ \hline 7\sqrt{-29}+29 \end{array}$$

Binomien werden multiplicirt:

$$\begin{array}{lr} & 1 - 1\sqrt{-1} \\ & 1 + 1\sqrt{-1} \\ \hline & 1\sqrt{-1} - 1 + 1 \\ & 1 - 1\sqrt{-1} \\ \hline \text{Reduc.} & 1 - 1\sqrt{-1} + 1\sqrt{-1} + 1 + 1 \\ \hline \text{giebt:} & 2 \end{array}$$

Hier sagte:

(1) $1\sqrt{-1}$ mahl $-1\sqrt{-1}$ giebt: 1 (§. 259).
(2) $1\sqrt{-1}$ mahl 1 giebt: $1\sqrt{-1}$ } (§. 256).
(3) 1 mahl $-1\sqrt{-1}$ giebt: $-1\sqrt{-1}$ } (§. 256).
(4) 1 mahl 1 giebt: 1

Item:

$$\begin{array}{lr} & -5 - \sqrt{-5} \\ & -5 + \sqrt{-5} \\ \hline & -5\sqrt{-5} + 5 \\ & 25 + 5\sqrt{-5} \\ \hline \text{Reduc.} & 25 + 5\sqrt{-5} - 5\sqrt{-5} + 5 \\ \hline \text{giebt:} & 30 \end{array}$$

Hier sagte:

(1) $\sqrt{-5}$ mahl $-\sqrt{-5}$ giebt: 5 (§. 259).
(2) $\sqrt{-5}$ mahl -5 macht: $-5\sqrt{-5}$ } (§. 256).
(3) -5 mahl $-\sqrt{-5}$ thut: $5\sqrt{-5}$ } (§. 256).
(4) -5 mahl -5 giebt: 25

4) Dividirt werden vorstehende Producten:

$$\begin{array}{rr} -\sqrt{-29}) & -7\sqrt{-29} + 29 \;[\; 7 + \sqrt{-29} \\ & 7\sqrt{-29} \\ \hline -\sqrt{-29}) & 29 \\ & -29 \\ \hline & 0 \end{array}$$

dañ weil der Divisor und Quotient zum Product + bringen (§. 259), so wurde solches unter − gehörig subtrahirt.

$$\begin{array}{rr} \text{Oder: } 7 + \sqrt{-29}) & -7\sqrt{-29} + 29 \;]\; -\sqrt{-29} \\ & 7\sqrt{-29} - 29 - 29 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Item: $\sqrt{-29})\ 7\sqrt{-29} + 29 \mid 7 - \sqrt{-29}$
$-7\sqrt{-29}$
$\sqrt{-29})\ 29$
-29
0

Item: $-\sqrt{-29})\ 7\sqrt{-29} + 29 \mid -7 + \sqrt{-29}$
$-7\sqrt{-29}$
$-\sqrt{-29})\ 29$
-29
0

Das erste binomische Product wird ohnreducirt dividirt:

$1 + \sqrt{-1})\ 1 - \sqrt{-1} + \sqrt{-1} + 1 \mid 1 - \sqrt{-1}$
$-1 \qquad -\sqrt{-1}$
$1 + \sqrt{-1})\ -\sqrt{-1} + 1$
$+\sqrt{-1} - 1$
0

Hier sagte:

(1) 1 in 1 habe: 1, 1 mahl 1 ist: 1, und subtrahirte dieses.
(2) 1 mahl $\sqrt{-1}$ giebt: $\sqrt{-1}$ (§.256), und subtrahirte solches.
(3) 1 in $-\sqrt{-1}$ habe: $-\sqrt{-1}$, alsdann $-\sqrt{-1}$ mahl 1, giebt: $-\sqrt{-1}$ (§.256), und subtrah. diese.
(4) $-\sqrt{-1}$ mahl $\sqrt{-1}$ giebt: 1 (§.259), und subtrahirte solches unter + (§.68).

Das zweite binomische Product wird ohnreducirt dividirt:

$-5 + \sqrt{-5})\ 25 + 5\sqrt{-5} - 5\sqrt{-5} + 5 \mid -5 - \sqrt{-5}$
$-25 \qquad 5\sqrt{-5}$
$-5 + \sqrt{-5})\ 5\sqrt{-5} + 5$
$-5\sqrt{-5} - 5$
0

Hier sagte:

(1) -5 in 25 habe: -5, und -5 mahl -5 giebt: 25, und subtrahirte dieselben.
(2) -5 mahl $\sqrt{-5}$ giebt: $-5\sqrt{-5}$ (§.256), und subtrahirte unter + (§.68).
(3) -5 in $5\sqrt{-5}$ habe: $-\sqrt{-5}$, und $-\sqrt{-5}$ mahl $5\sqrt{-5}$, thut: 5, welche subtrahirte.
(4) $-\sqrt{-5}$ mahl -5 macht: $5\sqrt{-5}$, und subtrahirte diese.

5) Zum Quadrat wird ein Binomium erhoben:

$$
\begin{array}{rl}
 & -1 - \sqrt{-3} \\
 & -1 - \sqrt{-3} \\
\hline
 & 1\sqrt{-3} - 3 \\
 & 1 + 1\sqrt{-3} \\
\hline
\text{Reduc.} & 1 + 2\sqrt{-3} - 3 \\
\end{array}
$$

giebt: $-2 + 2\sqrt{-3}$ zur Quadratzahl.

Hier sagte:

(1) $-\sqrt{-3}$ mahl $-\sqrt{-3}$ giebt: -3 (§. 254).
(2) $-\sqrt{-3}$ mahl -1 macht: $1\sqrt{-3}$ } (§. 256).
(3) -1 mahl $-\sqrt{-3}$ thut: $1\sqrt{-3}$ }
(4) -1 mahl -1 ist: 1.

Oder, weil die Wurzel $-$ und $+$ sein kan (§. 181):

$$
\begin{array}{rl}
 & -1 + \sqrt{-3} \\
 & -1 + \sqrt{-3} \\
\hline
 & -1\sqrt{-3} - 3 \\
 & 1 - 1\sqrt{-3} \\
\hline
\text{Reduc.} & 1 - 2\sqrt{-3} - 3 \\
\end{array}
$$

giebt: $-2 - 2\sqrt{-3}$ zur Quadratzahl.

Die Ausziehung der Wurzel aus dem erstern unreducirten binomischen Quadrat:

$$
\begin{array}{r|l}
1 + 2\sqrt{-3} - 3 & 1 + \sqrt{-3} \\
-1 & \\
\hline
2)\ 2\sqrt{-3} - 3 & \\
-2\sqrt{-3} & \\
\hline
-3 & \\
3 & \\
\hline
0 & \\
\end{array}
$$

Die Wurzel aus dem Quadrat 1 ist 1 (§. 171), welche quadrirt von 1 subtrahirt wurde. Als mit dem Duplum dieses ersten Wurzelgliedes, d. i. 2, der Rest dividirt ward, kam zum zweiten Wurzelglied $+\sqrt{-3}$, dessen Quadrat, d. i. nach §. 254, -3, unter $+$ subtrahirt werden muste.

Die Ausziehung der Wurzel aus dem zweiten unreducirten binomischen Quadrat:

$$
\begin{array}{rl}
1 - 2\sqrt{-3} - 3 & \mid 1 - \sqrt{-3} \\
-1 & \\
\hline
2)\, - 2\sqrt{-3} - 3 & \\
2\sqrt{-3} & \\
\hline
-3 & \\
3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Nota I. Daß die Quadratwurzel, wie sonsten (§. 233), also auch hier, aus einer negativen Grösse sowohl positiv als negativ genommen werden könne (§. 254), solches ist zwar unbegreiflich, jedoch durch Rechnen zu beweisen, wann nemlich ein jedes Quadrat noch einmal mit seiner Wurzel multiplicirt wird, da dann einerlei Cubicgrössen kommen müssen.

Das erste unreducirte binomische Quadrat wird durch seine Wurzel zur Cubicgrösse erhoben:

$$
\begin{array}{rr}
 & 1 + 2\sqrt{-3} - 3 \\
 & -1 - \sqrt{-3} \\
\hline
 & -1\sqrt{-3} + 6 + 3\sqrt{-3} \\
 & -1 - 2\sqrt{-3} + 3 \\
\hline
\text{Reduc.} & -1 - 3\sqrt{-3} + 9 + 3\sqrt{-3} \\
\hline
 & \text{giebt: } 8 \text{ zur Cubicgrösse.}
\end{array}
$$

Hier sagte:

(1) $-\sqrt{-3}$ mahl -3 macht: $3\sqrt{-3}$ (§. 256).
(2) $-\sqrt{-3}$ mahl $2\sqrt{-3}$ thut: 6 (§. 260).
(3) $-\sqrt{-3}$ mahl 1 giebt: $-1\sqrt{-3}$ (§. 256).
(4) -1 mahl -3 macht: 3 (§. 78).
(5) -1 mahl $2\sqrt{-3}$ thut: $-2\sqrt{-3}$ (§. 256).
(6) -1 mahl 1 giebt: -1 (§. 78).

Das zweite unreducirte binomische Quadrat wird durch seine Wurzel zur Cubicgrösse erhoben:

$$
\begin{array}{r}
1-2\sqrt{-3}-3 \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
1\sqrt{-3}+6-3\sqrt{-3} \\
-1+2\sqrt{-3}+3 \qquad\qquad \\
\hline
\text{Reduc. } -1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} \\
\hline
\end{array}
$$

giebt: 8 zur Cubicgrösse.

Hier sagte:

(1) $\sqrt{-3}$ mahl -3 giebt: $-3\sqrt{-3}$ (§. 256).
(2) $\sqrt{-3}$ mahl $-2\sqrt{-3}$ thut: 6 (§. 254).
(3) $\sqrt{-3}$ mahl 1 macht: $1\sqrt{-3}$ (§. 256).
(4) -1 mahl -3 giebt: 3 (§. 78).
(5) -1 mahl $-2\sqrt{-3}$ thut: $2\sqrt{-3}$ (§. 256).
(6) -1 mahl 1 macht: -1 (§. 78).

Die Ausziehung der Wurzel aus der zweiten unreducirten binomischen Cubicgrösse:

$$
\begin{array}{l}
-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} \mid -1+\sqrt{-3} \\
\;\;1 \\
\hline
\quad 3)\,3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} \\
\quad -3\sqrt{-3} \\
\hline
\qquad\qquad 9-3\sqrt{-3} \\
\qquad\quad\; -9 \\
\hline
\qquad\qquad -3\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\;\; 3\sqrt{-3} \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Da man es hier mit einer Cubicgrösse zu thun hatte, und sich bei dem ersten Glied die Eigenschaft einer eingebildeten Cubicgrösse vorfande, so wurde von demselben die Wurzel genommen, in der Einbildung cubiret, und, weil der Cubus negativ, unter + vom ersten Glied subtrahirt (s. §. 256 Not. II.).

Alsdann wurde mit dem dreifachen Quadrat von dem ersten Wurzelglied, nemlich 3, (dann -1 mahl -1 bringt 1 zum Quadrat, und dieses mit 3 multiplicirt, macht 3,) dividirt, und $\sqrt{-3}$ erhalten.

 Ferner

Ferner wurde das dreifache Quadrat des zweiten Wurzelglieds, mit dem vorstehenden Wurzelglied multiplicirt, welches 9 machte, subtrahirt (dann das Quadrat von $\sqrt{-3}$ ist nach §. 254 -3, welches dreimahl genommen -9, und dieses mit -1 multiplicirt 9 bringet).

Endlich wurde der Cubus von $\sqrt{-3}$, nemlich $3\sqrt{-3}$ [dann das Quadrat von $\sqrt{-3}$ ist nach §. 254 -3, und dieses mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, macht $-3\sqrt{-3}$ (§. 256)], unter $+$ subtrahirt.

Die Ausziehung der Wurzel aus der erstern unreducirten binomischen Cubicgrösse:

$$
\begin{array}{l}
-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3} \mid -1-\sqrt{-3} \\
\underline{1\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
3)-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3} \\
\underline{\quad 3\sqrt{-3}\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 9+3\sqrt{-3} \\
\qquad\quad \underline{-9\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad 3\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad \underline{-3\sqrt{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Diese Ausziehung der Wurzel ist der vorhergehenden ganz gleich, ausgenommen, daß es endlich hiese: Das Quadrat von $-\sqrt{-3}$ ist -3 [dann die Wurzel kan $+$ und $-$ sein (§. 254)], alsdann das Quadrat -3 und die Wurzel $-\sqrt{-3}$ miteinander multiplicirt, giebt: $3\sqrt{-3}$ (§. 256), folglichen muste dieses unter $-$ subtrahirt werden.

Nota II. Die Ergänzung binomischer Quadratgrössen geschiehet lediglich nach §. 248, mithin wäre überflüssig, desfals Exempeln darüber zu geben.

§. 265. **Wie sich aber solche Fälle ereignen können, bei welchen aus einer negativen Zahl die Wurzel auszuziehen vorkomt (§. 251), solches werden folgende Exempeln klar machen, und die inskünftige bei den Gleichungen bekant sein müssen (s. §. 608).**

Z. E. Es würde gefragt: Wie eine Zahl in zween Theile getheilet werden müsse, daß das Product einer gegebenen Zahl gleich

gleich sei? so kônte sichs bei der Berechnung einer solchen Vorgabe fügen, daß die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse gezogen werden solte, welches dann schlechterdings ohnmöglich wäre (§. 251).

§. 266. Die Regeln zu dieser Theilung sind:

Erstlich theilet man die gegebene, oder nach Masgab eines Exempels vorhandene Zahl in zween gleiche Theile, quadriret einen derselben, subtrahirt von dem erhaltenen Quadrat das Product, welches die beide zu suchende Theile machen sollen, und füget jedem gleichen Theil den Unterschied einmahl negativ und einmahl positiv bei.

Sezet sodann jedem Theil die Quadratwurzel aus dem Unterschied unter eben dem Zeichen bei, und reducirt endlich beide Theile gewöhnlich.

Z. E. a) Wie wird die Zahl — 10 in zween Theile getheilet, daß das Product derselben 21 gebe?

Halb — 10 ist — 5, und das Quadrat 25
— 21 Das Product.
$\sqrt{4}$ Unterschied.
2 Die Wurzel.

Nun ist die Formel:

$$\frac{-5-\sqrt{4}}{-5-2=-7} \quad . \quad \frac{-5+\sqrt{4}}{-5+2=-3}$$

Also sind die beiden Theile — 7 und — 3, weil deren Product 21 ist (§. 78).

b) Welches sind die beiden Zahlen, deren Summe 3, und ihr Product — 28 machet?

Halb 3 ist $1\frac{1}{2}$, und das Quadrat davon: $2\frac{1}{4}$
28; dann das Product — 28 wird addirt (§.71).
$\sqrt{30\frac{1}{4}}$ Unterschied.
$5\frac{1}{2}$ Die Wurzel.

Nun ist die Formel:

$$\frac{1\frac{1}{2} - \sqrt{30\frac{1}{4}}}{1\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} = -4} \quad . \quad \frac{1\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}}}{1\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 7}$$

Also sind die beiden Zahlen — 4 und 7, weil deren Product — 28 ist (§.78).

c) Welches sind die beiden Zahlen, deren Summe — 3, und das Product — 28 ist?

Halb — 3 ist — $1\frac{1}{2}$, das Quadrat: $2\frac{1}{4}$ (§.78).
28 Das Product — 28 addirt (§.71).
$\sqrt{30\frac{1}{4}}$ Unterschied.
$5\frac{1}{2}$ Die Wurzel.

Nun ist die Formel:

$$\frac{-1\frac{1}{2} - \sqrt{30\frac{1}{4}}}{-1\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} = -7} \quad . \quad \frac{-1\frac{1}{2} + \sqrt{30\frac{1}{4}}}{-1\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 4}$$

Also sind die beiden Zahlen — 7 und 4, weil deren Product — 28 giebt (§.78).

d) Welches sind die zween Theile von 11, deren Product 28 ist?

Halb 11 ist $5\frac{1}{2}$, das Quadrat: $30\frac{1}{4}$
-28 Das Product.
$\sqrt{2\frac{1}{4}}$ Unterschied.
$1\frac{1}{2}$

Nun ist die Formel:

$$\frac{5\frac{1}{2}-\sqrt{2\frac{1}{4}}}{5\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=4} \cdot \frac{5\frac{1}{2}+\sqrt{2\frac{1}{4}}}{5\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=7}$$

Also sind die beiden Theile 4 und 7, weil deren Product 28 ist.

Item: Wie wird die Zahl 10 in zween Theile getheilet, daß der beiden Theile Product 24 sei?

Halb 10 ist 5, das Quadrat: 25
-24 Das Product.
$\sqrt{1}$ Unterschied.
1 Die Wurzel.

Nun ist die Formel:

$$\frac{5-\sqrt{1}}{5-1=4} \cdot \frac{5+\sqrt{1}}{5+1=6}$$

Also sind die beiden Theile 4 und 6, weil deren Product 24 ist.

Item:

Item: Was sind das für zwo Zahlen, deren Summe 13, und ihr Product 42 machet?

Halb 13 ist $6\frac{1}{2}$, und das Quadrat: $42\frac{1}{4}$
-42 Das Product.
$\sqrt{\frac{1}{4}}$ Unterschied.
$\frac{1}{2}$ Die Wurzel.

Nun ist die Formel:

$$\frac{6\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}}}{6\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=6} \cdot \frac{6\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}}{6\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=7}$$

Also sind die zwo Zahlen 6 und 7; dann $6+7$ ist 13, und 6 mahl 7 ist 42.

Item: Was sind das für zwo Zahlen, welche, wann man sie addirt, -1, und wann sie multiplicirt, -30 zum Product bringen?

Halb -1 ist $-\frac{1}{2}$, das Quadrat: $\frac{1}{4}$; dann $-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (§.78).
30 Das Product -30 addirt (§.71).
$\sqrt{30\frac{1}{4}}$ Unterschied.
$5\frac{1}{2}$ Die Wurzel.

Nun ist die Formel:

$$\frac{-\frac{1}{2}-\sqrt{30\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{2}-5\frac{1}{2}=-6} \cdot \frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{30\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}=5}$$

Also sind die beide Zahlen -6 und 5; dann $-6+5$ ist -1, und 5 mahl -6 giebt -30.

e) Wie wird die Zahl 14 in zween Theile getheilet, daß deren Product 20 giebt?

Halb-14 ist 7, das Quadrat: 49
-20 Das Product.
$\sqrt{29}$ Der Unterschied.

Die Formel ist nun:

$$\frac{7-\sqrt{29}}{7-\sqrt{29}} \cdot \frac{7+\sqrt{29}}{7+\sqrt{29}}$$

Weil aus 29 die Quadratwurzel nicht ausgezogen werden kan, so bestehet die Summe und das Product aus diesen beiden Theilen, mithin aus Irrationalzahlen (§. 228 u. f.), welche aber doch ihre Richtigkeit haben, indeme ihre Summe nach §. 242 $= 14$, und ihr Product nach §. 243 h $= 20$. Die Bezeichnung aber ist hievon: $7 \pm \sqrt{29}$.

f) Wie wird die Zahl -10 getheilet, daß beider Theilen Product 30 macht?

Halb -10 ist -5, das Quadrat: 25
-30 Das Product.
$\sqrt{-5}$ Der Unterschied.

Die Formel ist nun:

$$\frac{-5-\sqrt{-5}}{-5-\sqrt{-5}} \cdot \frac{-5+\sqrt{-5}}{-5+\sqrt{-5}}$$

Also sind die beiden Theile $-5-\sqrt{-5}$, und $-5+\sqrt{-5}$.

Da nun hier die Wurzel aus -5 ohnmöglich, mithin auch die Beantwortung dieser Frage ganz und gar ohnmöglich ist (§. 250), so muß man sich mit diesen eingebildeten Zahlen begnügen, deren Formel also ist: $-5 \pm \sqrt{-5}$. Indessen haben doch beide Theile ihre Richtigkeit, indeme ihre Summe nach §. 264 N. 1 $= -10$, und ihr Product §. ibid. N. 3 $= 30$ ist.

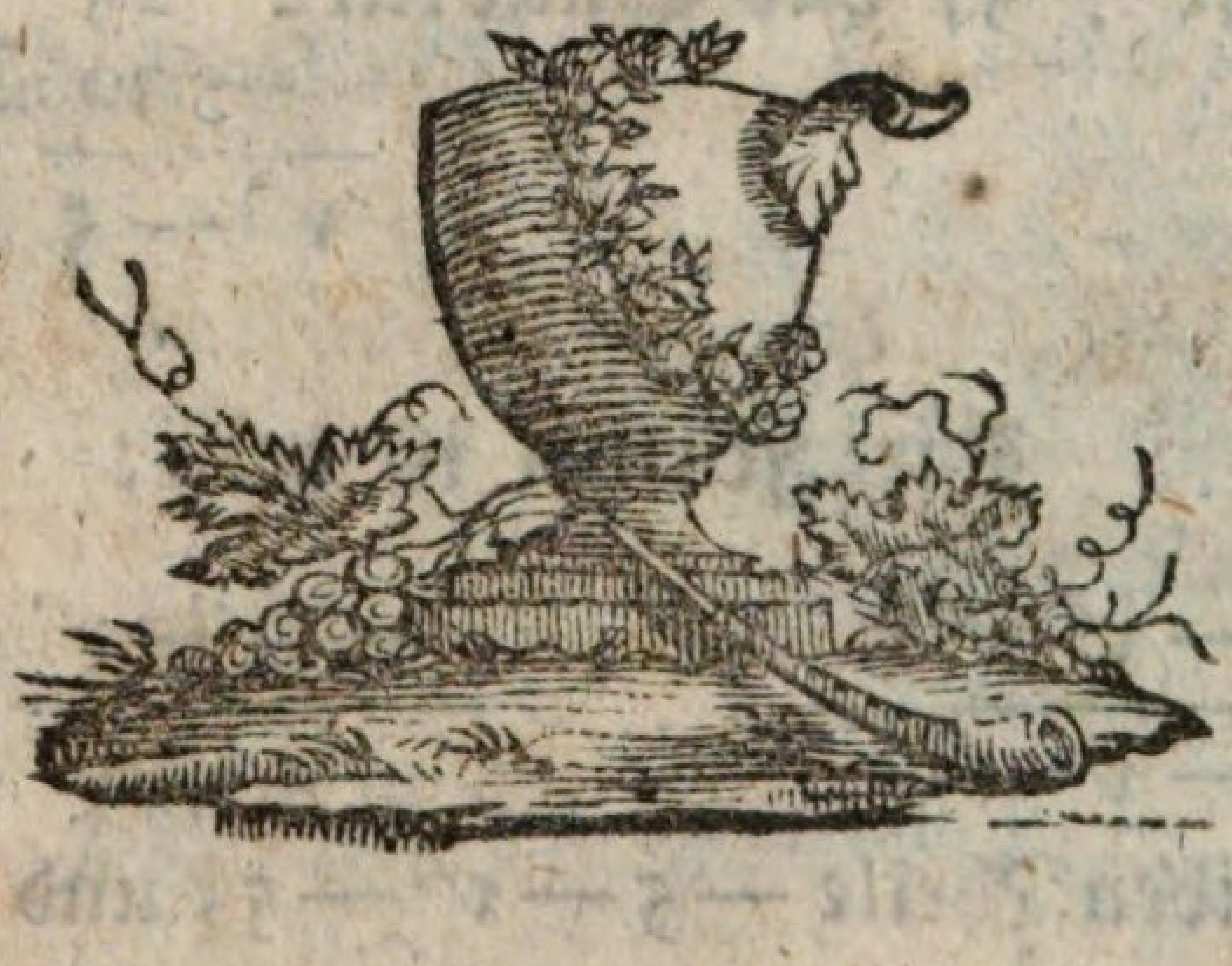
Item: Wie wird die Zahl 2 getheilet, daß beider Theile Product 2 bringe:

Halb 2 ist 1, das Quadrat davon: 1
— 2 Das Product.
$\sqrt{-1}$ Der Unterschied.

Nun ist die Formel:

$$\frac{1-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$$

Also sind die beiden Theile $1-\sqrt{-1}$, und $1+\sqrt{-1}$, welche zusammen bezeichnet werden: $1 \pm \sqrt{-1}$, und nach §. 264 N. 1 zur Summe 2 und §. ibid. N. 3 zum Product 2 bringen.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schirmer, Johann Michael

Johann Michael Schirmer Schul- Schreib- und Rechenmeisters in Frankfurt am Main selbstlehrende Algebra das ist gründliche Anweisung wie ein jeder welcher die gemeine Rechenkunst verstehet diese vortrefliche Wissenschaft ohne mündlichen Unterricht lernen und mittelst derselben alle schwere
Bd.: 1.

Frankfurt am Main (1779)

Math.p. 501-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082731-5
VD18 90246373